МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского**

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть 1

Рекомендовано методической комиссией факультета ВМК
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
010400 «Прикладная математика и информатика» и
010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»

Нижний Новгород
2015

УДК 519.246
ББК 22.172
П80

П80 Практикум по теории вероятностей. Часть 1. Авторы: Пройдакова Е.В., Федоткин М.А., Зорин В.А.: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2015. – 59 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **Н.В. Кротов**

Практикум по теории вероятностей содержит необходимые теоретические сведения, разобранные примеры и задачи для самостоятельного решения по темам «Одномерные дискретные случайные величины», «Одномерные непрерывные случайные величины», «Числовые характеристики одномерных случайных величин», «Функциональные зависимости от одномерных случайных величин», «Наиболее распространенные дискретные случайные величины», «Тестовые непрерывные случайные величины».

Практикум предназначен для студентов третьего курса и магистрантов первого года обучения факультета вычислительной математики и кибернетики, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Ответственный за выпуск:
заместитель председателя методической комиссии
факультета ВМК ННГУ,
к.т.н., доцент **В.М. Сморкалова**

УДК 519.246
ББК 22.172

Оглавление

1. Одномерные дискретные случайные величины

Занятие посвящено одномерным дискретным случайным величинам и их законам распределения.

1.1. Краткие теоретические сведения

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F})$ есть теоретико-множественная модель произвольного статистически устойчивого эксперимента E.

Одномерной случайной величиной (с.в.) $\xi(\omega)$ на $(\Omega, \mathfrak{F})$ называется всякое отображение Ω на R, для которого выполняется условие измеримости, то есть $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$ при любом $x \in R$.

Обозначим через $X \subset R$ множество значений произвольной случайной величины $\xi(\omega)$. Множество X может быть либо только счётным (бесконечным возможно и конечным) или только несчётным.

Функция $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}), x \in X$ называется **интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения** случайной величины $\xi(\omega)$. Функция $F_\xi(x)$ устанавливает соответствие между возможными значениями с.в. $\xi(\omega)$ и вероятностями некоторых событий из $\mathfrak{F}$, связанных определенным образом с этими возможными значениями.

Интегральная функция распределения любой случайной величины $\xi(\omega)$ является неубывающей и непрерывной слева функцией, удовлетворяющей неравенствам вида $0 \le F_\xi(x) \le 1$ и предельным равенствам $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = F_\xi(+\infty) = 1$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = F_\xi(-\infty) = 0$. Иногда для краткости вместо $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\})$ будем писать $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x)$.

Случайная величина $\xi(\omega)$ называется дискретной, если множество ее возможных значений счётно $X = \{x_1, x_2, ...\}$, причем $\mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) = x_1\}) = p_1 > 0$, $\mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) = x_2\}) = p_2 > 0, ...$ и $p_1 + p_2 + ... = 1$ (условие нормировки). Совокупность $\{p_i : i = 1, 2, ...\}$ называется распределением дискретной случайной величины $\xi(\omega)$. В простейшем варианте, подмножество X содержит лишь конечное число m элементов, т. е. $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$.

Интегральная функция распределения $F_\xi(x)$ одномерной дискретной случайной величины $\xi(\omega)$ вычисляется по следующей формуле:

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) = \mathrm{P}\Big(\bigcup_{i : x_i < x} \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}\Big) = \sum_{i : x_i < x} \mathrm{P}(\xi = x_i) = \sum_{i : x_i < x} p_i$$

Производная интегральной функции распределения дискретной случайной величины $\xi(\omega)$ всюду равна нулю, исключая точки $x_i \in X$, в которых $F_\xi(x)$ терпит разрывы и $F_\xi(x_i+0)-F_\xi(x_i)=p_i, i=1,2,...$

График интегральной функции распределения $F_\xi(x)$ дискретной случайной величины $\xi(\omega)$ имеет ступенчатый или кусочно-постоянный вид (рис. 1.1).

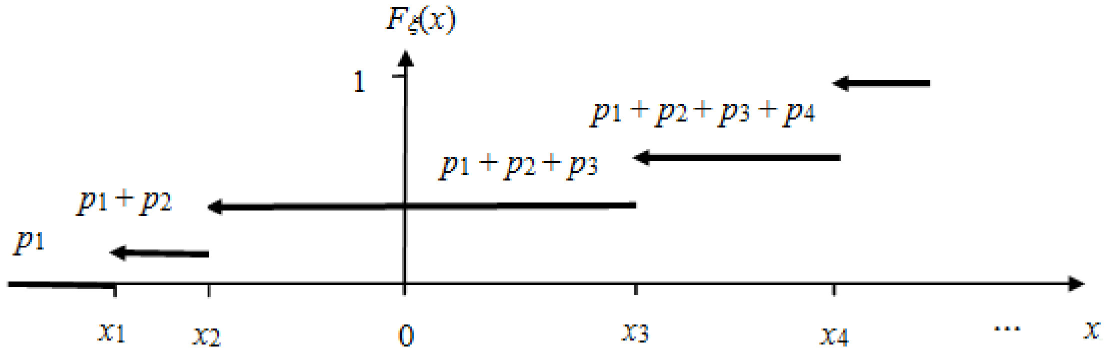


Рис. 1.1

Рассмотрим случай, когда значения дискретной случайной величины из множества X можно занумеровать в виде строго возрастающей последовательности $x_1 < x_2 < ...$ и при этом $x_i, i=1,2,...$ отделены интервалами. (Если X содержит конечное число элементов, то это можно сделать всегда). Для такой случайной величины $\xi(\omega)$, часто используют такие законы как ряд и многоугольник распределения. Эти законы полностью эквивалентны интегральной функции $F_\xi(x)$ и распределению $\{p_i : i=1,2,...\}$.

Ряд распределения дискретной случайной величины $\xi(\omega)$ при $X=\{x_1, x_2, ...\}$ представляет собой таблицу следующего вида:

ξ(ω)	x_1	x_2	...	x_i	...
P(•)	p_1	p_2	...	p_i	...

Ряд распределения можно изобразить графически. Для этого на плоскости для $i=1,2,...$ поставим точку с абсциссой x_i и ординатой p_i. Затем каждые две соседние точки соединим отрезком. Полученный график в виде ломанной кривой представляет собой **многоугольник или полигон распределения** вероятностей. На рис. 1.2 приведен пример, когда $\xi(\omega)$ принимает значения x_1, x_2, x_3 и x_4 с вероятностями p_1, p_2, p_3 и p_4, многоугольник распределения вероятностей помечен штриховкой.

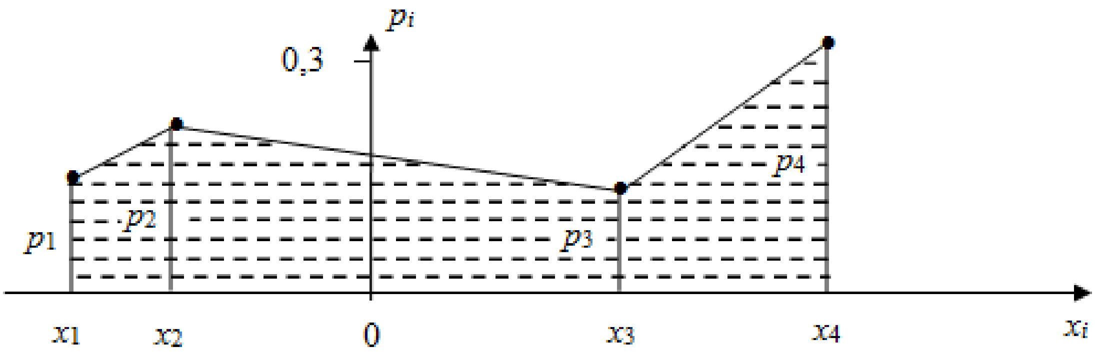


Рис. 1.2

1.2. Примеры решения задач

Пример 1.2.1. В ящике 3 бракованных и 5 качественных деталей. Детали извлекаются из ящика по одной без возвращения до появления первой качественной детали. Пусть случайная величина ξ - число произведенных извлечений. Построить для с.в. ξ: а) ряд распределения, б) многоугольник распределения, в) интегральную функцию распределения г) график интегральной функции распределения.

Решение: Случайная величина ξ соответствует числу произведенных извлечений деталей. Из условий задачи видно, что возможными значениями с.в. ξ являются: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$.

Далее необходимо найти вероятности для каждого из возможных значений с.в. ξ.

$$p_1 = P(\xi = x_1) = P(\xi = 1) = \frac{5}{8} = 0,625$$

$$p_2 = P(\xi = x_2) = P(\xi = 2) = \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} \approx 0,268$$

$$p_3 = P(\xi = x_3) = P(\xi = 3) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{6} = \frac{30}{336} \approx 0,089$$

$$p_3 = P(\xi = x_4) = P(\xi = 4) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{5} = \frac{30}{1680} \approx 0,018$$

Для дискретной случайной величины должно выполняться условие $p_1 + p_2 + ... = 1$, т.е. в нашем случае $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Проверим это условие, подставив полученные значения с учетом округления для $p_i, i = \overline{1,4}$:

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,625 + 0,268 + 0,089 + 0,018 = 1.$$

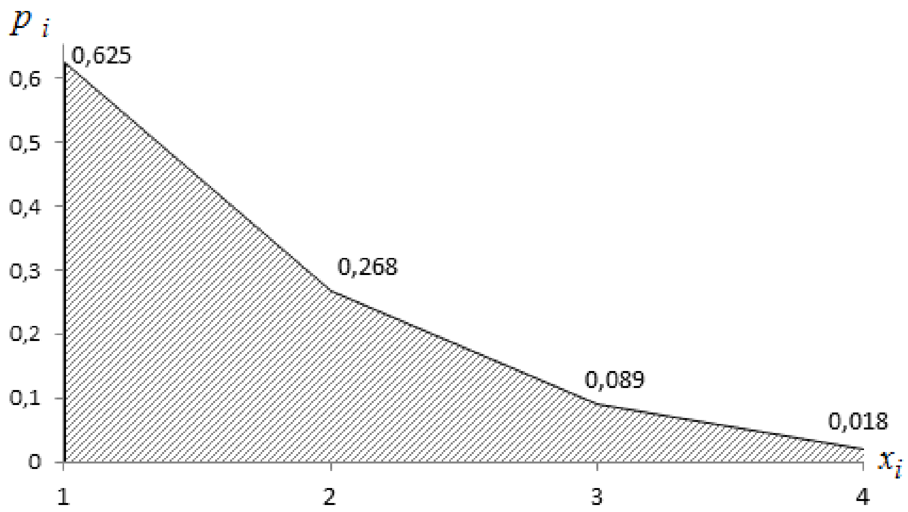
Условие нормировки выполнено.

а) Не забываем, что в ряде распределения значения должны быть упорядочены по возрастанию, т.е. $x_1 < x_2 < \ldots$. В нашем случае это получилось автоматически, так как $x_1 = 1 < x_2 = 2 < x_3 = 3 < x_4 = 4$.

С учетом полученных результатов можем записать ряд распределения для с.в. ξ

$\xi = x_i$	1	2	3	4
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	0,625	0,268	0,089	0,018

б) Построим многоугольник распределения:



в) В нашем случае интегральная функция распределения $F_\xi(x)$ одномерной дискретной случайной величины ξ вычисляется по формуле:
$F_\xi(x) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) = \sum\limits_{i: x_i < x} \mathrm{P}(\xi = x_i) = \sum\limits_{i: x_i < x} p_i$.

Распишем подробно приведенную формулу.

$F_\xi(x) = 0$ при $x \le x_1 = 1$.

$F_\xi(x) = \sum\limits_{i: x_i < x} p_i = p_1 = 0,625$ при $1 = x_1 < x \le x_2 = 2$.

$F_\xi(x) = \sum\limits_{i: x_i < x} p_i = p_1 + p_2 = 0,893$ при $2 = x_2 < x \le x_3 = 3$.

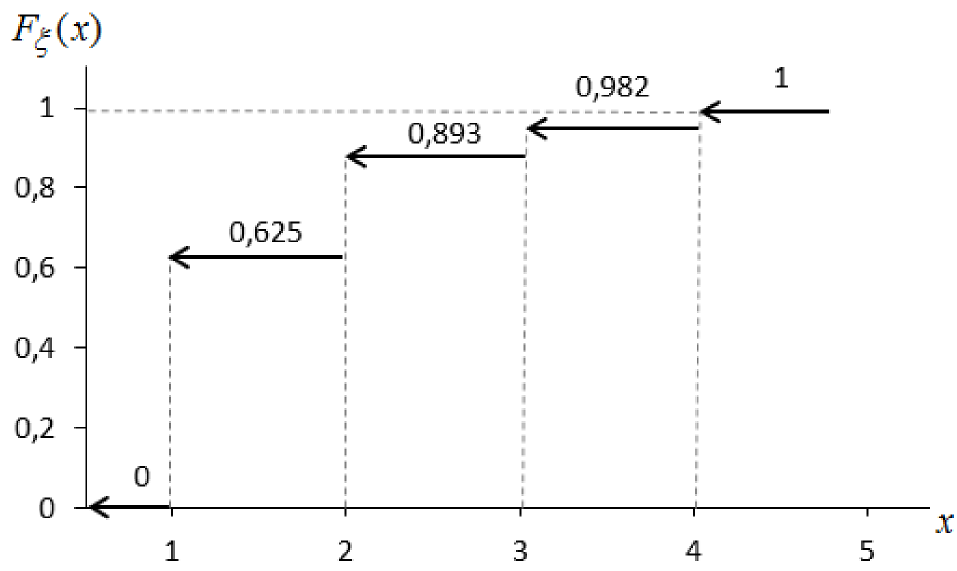
$F_\xi(x) = \sum\limits_{i: x_i < x} p_i = p_1 + p_2 + p_3 = 0,982$ при $3 = x_2 < x \le x_3 = 4$.

$$F_\xi(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \text{ при } 4 = x_4 < x.$$

Итоговый вид для интегральной функции распределения с.в. ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 0,625, & 1 < x \le 2; \\ 0,893, & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

г) Строим график интегральной функции распределения:



Пример 1.2.2. Случайная величина ξ имеет следующий ряд распределения:

$\xi = x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	c	$2c$	$2c$	$3c$	c^2	$2c^2$	$7c^2 + c$

где $c = const$. Необходимо найти c и вычислить вероятности $\mathrm{P}(1,2 \le \xi < 6)$, $\mathrm{P}(\xi > 4,3)$, $\mathrm{P}(\xi \le 3,8)$.

Решение: Для того, чтобы найти c будем использовать свойство нормировки распределения, в нашем случае должно выполняться $\sum\limits_{i=1}^{7} \mathrm{P}(\xi = x_i) = 1$. Подставляем известные значения из ряда распределения с. в. ξ: $\sum_{i=1}^{7} \mathrm{P}(\xi = x_i) = c + 2c + 2c + 3c + c^2 + 2c^2 + 7c^2 + c = 1.$

Преобразуем данное равенство и получаем: $10c^2 + 9c - 1 = 0$. Отсюда по известным формулам находим корни квадратного уравнения:

$$c_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{20} = \frac{-9 \pm 11}{20}.$$

Таким образом, получаем $c_1 = \frac{1}{10}$, $c_2 = -1$. Поскольку вероятности $\mathrm{P}(\xi = x_i) > 0$, то подходит только $c_1 = \frac{1}{10}$ и $c = c_1 = 0{,}1$.

Окончательно ряд распределения для с.в. ξ перепишется в виде:

$\xi = x_i$	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	0,1	0,2	0,2	0,3	0,01	0,02	0,17

$\mathrm{P}(1{,}2 \le \xi < 6) = \mathrm{P}(\xi = 2) + \mathrm{P}(\xi = 3) + \mathrm{P}(\xi = 4) + \mathrm{P}(\xi = 5) =$
$= 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}01 = 0{,}71.$

$\mathrm{P}(\xi > 4{,}3) = \mathrm{P}(\xi = 5) + \mathrm{P}(\xi = 6) + \mathrm{P}(\xi = 7) = 0{,}01 + 0{,}02 + 0{,}17 = 0{,}2$.

$\mathrm{P}(\xi \le 3{,}8) = \mathrm{P}(\xi = 3) + \mathrm{P}(\xi = 2) + \mathrm{P}(\xi = 1) = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}5$.

Ответ: $c = 0{,}1$, $\mathrm{P}(1{,}2 \le \xi < 6) = 0{,}71$, $\mathrm{P}(\xi > 4{,}3) = 0{,}2$, $\mathrm{P}(\xi \le 3{,}8) = 0{,}5$.

1.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.3.1. Ряд распределения дискретной случайной величины ξ имеет вид:

$\xi = x_i$	-2	-1	0	1	2
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Требуется: а) построить многоугольник распределения; б) найти интегральную функцию распределения с.в. ξ и построить ее график; в) вычислить вероятность $\mathrm{P}(|\xi| \le 1)$.

Задача 1.3.2. Интегральная функция распределения дискретной случайной величины ξ имеет следующий вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \le -6; \\ 0,15 & -6 < x \le -1; \\ 0,4 & -1 < x \le 2,4; \\ 0,57, & 2,4 < x \le 5; \\ 0,92, & 5 < x \le 9,3; \\ 1, & x > 9,3. \end{cases}$$

Требуется построить ряд распределения с.в. ξ.

Задача 1.3.3. Имеется три независимо работающих устройства. Вероятность выдержать испытание для первого устройства равна 0,6, для второго – 0,7 и для третьего – 0,8. Пусть с.в. ξ - число устройств, выдержавших испытание. Необходимо построить интегральную функцию распределения с.в. ξ.

Задача 1.3.4. Ряд распределения дискретной случайной величины ξ имеет вид:

$\xi = x_i$	-3	0	1	2
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	$2c$	$7c^2$	c	$3c$

Найти константу с, построить график интегральной функции распределения с.в. ξ.

Задача 1.3.5. Игральную кость подбрасывают до тех пор, пока на верхней грани кости не выпадет 6 очков. Пусть ξ - число произведенных подбрасываний кости. Найти ряд распределения с.в. ξ и вычислить вероятность $\mathrm{P}(\xi \ge 6)$.

Задача 1.3.6. Интегральная функция распределения дискретной случайной величины ξ имеет следующий вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2; \\ 0,3, & 2 < x \le 3; \\ 0,5, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Построить ряд распределения с.в. ξ, найти вероятности $\mathrm{P}(\xi \ge 3{,}5)$ и $\mathrm{P}(|\xi| \le 2{,}5)$.

Задача 1.3.7. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,4. Пусть случайная величина ξ – суммарное число попаданий обоих стрелков. Для случайной величины ξ необходимо построить ряд распределения и многоугольник распределения, вычислить вероятность $P(0 \le \xi < 2)$.

Задача 1.3.8. Из урны, содержащей 3 белых и 6 черных шаров случайным образом, без возвращения извлекают 2 шара. Случайная величина ξ - число белых шаров в выборке. Для с.в. ξ построить интегральную функцию распределения и начертить ее график, вычислить вероятности $P(\xi \le 3)$, $P(\xi > 1)$ и $P(1 < \xi \le 3)$.

Задача 1.3.9. Построить ряд распределения и интегральную функцию распределения случайного числа ξ попаданий мяча в корзину при двух бросаниях, вероятность попадания при одном броске равна 0,4.

Задача 1.3.10. Симметричная монета подбрасывается n раз. Рассматривается с.в. ξ, соответствующая числу выпавших гербов. Построить ряд распределения этой случайной величины.

2. Одномерные непрерывные случайные величины

Занятие посвящено одномерным непрерывным случайным величинам и их законам распределения.

2.1. Краткие теоретические сведения

Одномерной случайной величиной (с.в.) $\xi(\omega)$ на $(\Omega, \mathfrak{F})$ называется всякое отображение Ω на R, для которого выполняется условие измеримости, то есть $\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{F}$ при любом $x \in R$.

Пусть $X \subset R$ - множество значений случайной величины $\xi(\omega)$. Функция $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\}), x \in X$ называется **интегральной функцией распределения или интегральным законом распределения** случайной величины $\xi(\omega)$. Функция $F_\xi(x)$ устанавливает соответствие между возможными значениями с.в. $\xi(\omega)$ и вероятностями некоторых событий из $\mathfrak{F}$, связанных определенным образом с этими возможными значениями.

Интегральная функция распределения любой случайной величины $\xi(\omega)$ является неубывающей и непрерывной слева функцией, удовлетворяющей неравенствам вида $0 \le F_\xi(x) \le 1$ и предельным равенствам $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = F_\xi(+\infty) = 1$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = F_\xi(-\infty) = 0$.

Далее для краткости вместо $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\})$ будем писать $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\xi < x)$.

Случайная величина $\xi(\omega)$ **называется непрерывной**, если множество ее значений X несчетно и существует такая функция $f_\xi(x) \ge 0$ с областью определения R, что для любого действительного числа x имеет место равенство $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du$.

Функция $f_\xi(x)$ называется **плотностью распределения вероятностей** или просто **плотностью распределения**, а $F_\xi(x)$ - **интегральной функцией распределения** непрерывной случайной величины $\xi(\omega)$.

Поскольку $\dfrac{dF_\xi(x)}{dx} = f_\xi(x)$, то **плотность распределения** вероятностей для случайной величины $\xi(\omega)$ часто **называют дифференциальной функцией распределения**.

Как правило, на практике плотность распределения $f_\xi(x)$ непрерывной случайной величины $\xi(\omega)$ имеет не более чем счётное число точек разрыва на R, причём на конечном промежутке таких точек разрыва может быть лишь конечное число. На рис. 2.1 приведён пример графика функции $f_\xi(x)$ который еще называют **кривой распределения** вероятностей случайной величины $\xi(\omega)$.

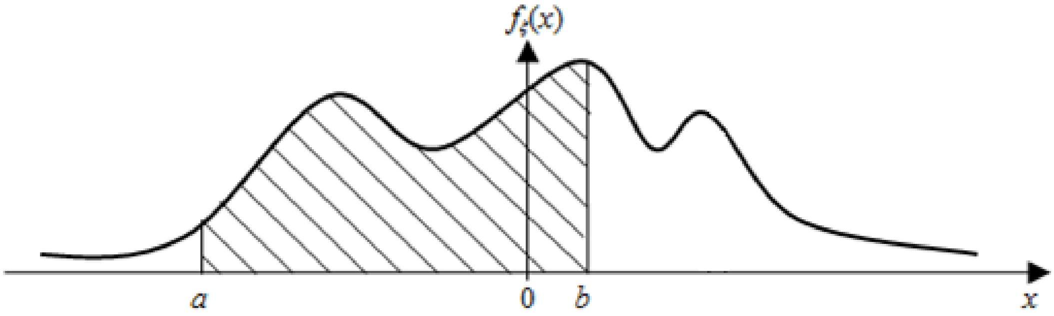


Рис. 2.1

Для плотности распределения $f_\xi(x)$ имеет место известное условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1$, то есть площадь между кривой распределения и осью абсцисс равна единице.

Любая непрерывная случайная величина $\xi(\omega)$ имеет абсолютно непрерывную **интегральную функцию распределения** $F_\xi(x)$. Это следует из равенства $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du$.

Примечание: *функция* $F_\xi(x)$ *называется абсолютно непрерывной, если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся такое число* $\delta > 0$*, что для любой конечной системы попарно непересекающихся интервалов* $(a_k, b_k) \subset (a,b), k = \overline{1,n}$ *с суммой длин строго меньше* δ*, будет иметь место* $\sum\limits_{i=1}^{n} \left|F(b_k) - F(a_k)\right| < \varepsilon$.

График интегральной функции распределения $F_\xi(x)$ непрерывной случайной величины не имеет скачков, пример графика функции такого вида приведен на рис. 2.2.

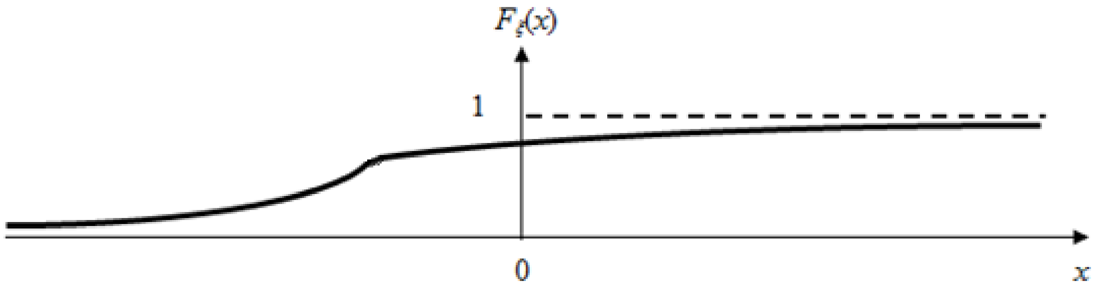


Рис. 2.2

Поскольку $F_\xi(x)$ является непрерывной функцией, то вероятность того, что непрерывная случайная величина $\xi(\omega)$ примет какое-либо конкретное значение x, равна нулю $\mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) = x\}) = F_\xi(x+0) - F_\xi(x) = 0$.

Отсюда получаем:

$$\mathrm{P}(\{\omega : a \le \xi(\omega) < b\}) = \mathrm{P}(\{\omega : a \le \xi(\omega) \le b\}) = \mathrm{P}(\{\omega : a < \xi(\omega) < b\}) =$$
$$= \mathrm{P}(\{\omega : a < \xi(\omega) \le b\}) = \int_a^b f_\xi(u)du.$$

Таким образом, вероятность попадания случайной величины ξ в каждый из указанных выше промежутков равна площади криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 2.1 наклонными линиями.

Далее кратко перечислим основные свойства функций $F_\xi(x)$ и $f_\xi(x)$.

Интегральная функция распределения $F_\xi(x)$ непрерывной случайной величины ξ имеет следующие основные свойства:

- $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du$;
- $\mathrm{P}(\{a \le \xi < b\}) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;
- $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$, если $x_1 < x_2$;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = F_\xi(+\infty) = 1$;
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = F_\xi(-\infty) = 0$

.

Плотность распределения вероятности $f_\xi(x)$ (дифференциальный закон распределения) непрерывной случайной величины ξ имеет следующие основные свойства:

- $f_\xi(x)=\dfrac{dF_\xi(x)}{dx}$;
- $f_\xi(x)\ge 0$;
- $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx=1$;
- $\mathrm{P}(\{\omega: a\le \xi(\omega)<b\})=\int\limits_a^b f_\xi(u)du$.

2.2. Примеры решения задач

Пример 2.2.1. Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины ξ имеет вид:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ ax^2, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Необходимо найти а) константу a; б) вид плотности распределения с.в. ξ; в) построить графики интегральной функции распределения и плотности распределения с.в. ξ; г) вычислить вероятность $\mathrm{P}(\frac{1}{3}<\xi\le\frac{1}{2})$ через плотность распределения случайной величины ξ.

Решение: Сначала найдем функцию распределения с.в. ξ. Используем соотношение $f_\xi(x)=\dfrac{dF_\xi(x)}{dx}$ и получаем выражение для $f_\xi(x)$:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2ax, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Чтобы найти константу a воспользуемся условием нормировки для плотности распределения $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx=1$. Для полученного выше выражения для плотности распределения с.в. ξ, получаем:

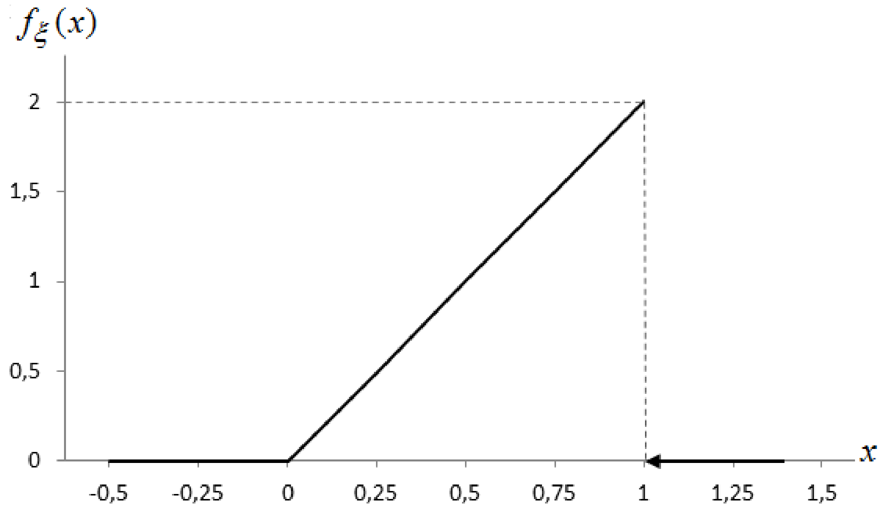
$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} f_\xi(x)dx+\int\limits_{0}^{1} f_\xi(x)dx+\int\limits_{1}^{+\infty} f_\xi(x)dx=\int\limits_0^1(2ax)dx=ax^2\Big|_0^1=a.$$

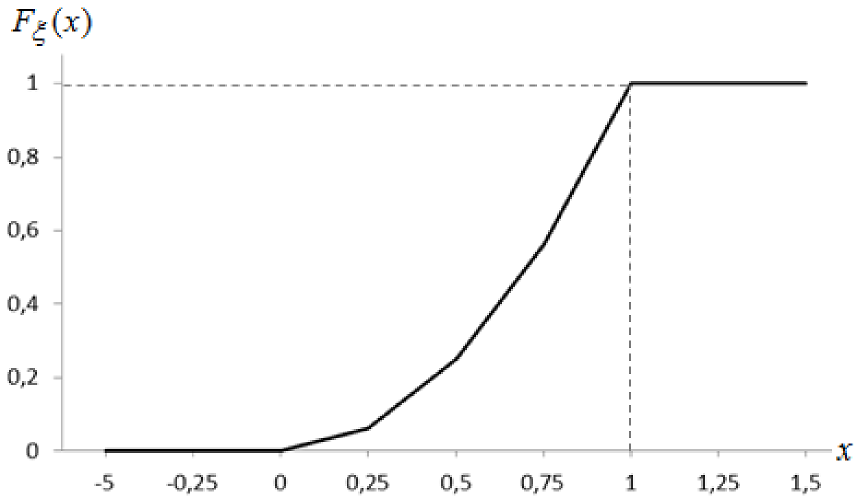
Таким образом, получаем, что $a = 1$ и окончательный вид функций $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$ запишется следующим образом:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x \le 1; \\ 0, & x \notin (0,1]. \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ x^2, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Построим графики для функций $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$:





Вычислим вероятность $P(\frac{1}{3} < \xi \le \frac{1}{2})$ через плотность распределения вероятности с.в. ξ. Для этого используем соотношение

$P(a < \xi \le b) = \int\limits_a^b f_\xi(u)du$ и тот факт, что для непрерывной случайной величины $P(\xi = x) = 0$. В результате получаем:

$$P(\frac{1}{3} < \xi \le \frac{1}{2}) = P(\frac{1}{3} \le \xi < \frac{1}{2}) = \int\limits_{1/3}^{1/2} f_\xi(x)dx = \int\limits_{1/3}^{1/2} 2xdx = x^2\Big|_{1/3}^{1/2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}.$$

Пример 2.2.2. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет следующий вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2\cos x, & x \in (0, a); \\ 0, & x \notin (0, a). \end{cases}$$

Найти константу a и интегральную функцию распределения с.в. ξ, вычислить вероятность $P(0 < \xi < \frac{\pi}{12})$.

Решение: Найдем константу a из условия нормировки для плотности распределения:

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f_\xi(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f_\xi(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \int\limits_{0}^{a} (2\cos x)dx =$$

$$= 2\sin x\Big|_0^a = 2\sin a - 2\sin 0 = 2\sin a.$$

Следовательно $\sin a = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; a = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Окончательно соотношение для функций $f_\xi(x)$ запишется следующим образом:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2\cos x, & x \in (0, \frac{\pi}{6}); \\ 0, & x \notin (0, \frac{\pi}{6}). \end{cases}$$

Получим соотношение для интегральной функции распределения $F_\xi(x)$, используя равенство $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du$.

$$F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du=0, x\le 0.$$

$$F_\xi(x)=\int\limits_{0}^{x} f_\xi(u)du=\int\limits_{0}^{x}(2\cos u)du=2\sin u\Big|_0^x=2\sin x, 0<x\le\frac{\pi}{6}.$$

$$F_\xi(x)=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} f_\xi(u)du+\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{x} f_\xi(u)du=1, x>\frac{\pi}{6}.$$

Окончательно, для $F_\xi(x)$ получаем:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2\sin x, 0<x\le \pi/6;\\ 1, & x>\pi/6.\end{cases}$$

Вычислим вероятность $\mathrm{P}(0<\xi<\frac{\pi}{12})$:

$$\mathrm{P}(0<\xi<\frac{\pi}{12})=\mathrm{P}(0\le\xi<\frac{\pi}{12})=F_\xi(\frac{\pi}{12})-F_\xi(0)=2\sin\frac{\pi}{12}-2\sin 0=2\sin\frac{\pi}{12}\approx 0{,}518.$$

Ответ: $a=\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{P}(0<\xi<\frac{\pi}{12})\approx 0{,}518$,

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2\sin x, 0<x\le \pi/6;\\ 1, & x>\pi/6.\end{cases}$$

Пример 2.2.3. Можно ли подобрать постоянную c так, чтобы функция $f(x)=cx^{-3}$ определяла плотность распределения вероятностей на луче $[1,+\infty)$?

Решение: Если функция $f(x)$ является плотностью распределения вероятностей некой случайной величины, то $f(x)\ge 0$ и для нее должно выполняться условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx=1$.

Для функции $f(x)=cx^{-3}$ на луче $[1,+\infty)$ получаем:

$f(x)=cx^{-3}\geq 0 \;\;\Rightarrow\;\; c\geq 0$.

$$1=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{1} f_{\xi}(x)dx+\int\limits_{1}^{+\infty} f_{\xi}(x)dx=\int\limits_{1}^{+\infty} cx^{-3}dx=-\frac{1}{2}cx^{-2}\Big|_{1}^{+\infty}=$$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(-\frac{1}{2}cx^{-2})+\frac{1}{2}c=0+\frac{1}{2}c=\frac{1}{2}c$. Таким образом, $c=2>0$.

Ответ: Можно подобрать $c=2$.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.3.1. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид $f_{\xi}(x)=\dfrac{a}{1+x^2}, -\infty<x<+\infty$. Требуется найти значение константы a и вид интегральной функции распределения $F_{\xi}(x)$.

Задача 2.3.2. Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины ξ определяется формулой:

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\leq 2;\\ (x-2)^2, & 2<x\leq 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения вероятностей с.в. ξ и построить ее график; б) вычислить вероятности $\mathrm{P}(1<\xi<2{,}5)$ и $\mathrm{P}(2{,}5\leq\xi\leq 3{,}5)$.

Задача 2.3.3. Плотность распределения вероятностей с.в. ξ определяется формулой:

$$f_{\xi}(x)=\begin{cases}0, & x\notin[1,2];\\ x-\dfrac{1}{2}, & x\in[1,2].\end{cases}$$

Необходимо найти интегральную функцию распределения $F_{\xi}(x)$ и построить ее график, вычислить вероятность $\mathrm{P}(1<\xi\leq 1{,}5)$.

Задача 2.3.4. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\in(1,a);\\ 0, & x\notin(1,a).\end{cases}$$

Найти: а) значение константы a; б) интегральную функцию распределения $F_\xi(x)$; в) вероятность $P(1<\xi<\frac{e}{2})$.

Задача 2.3.5. Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины ξ имеет следующий вид:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ ax^2+bx+\dfrac{2}{5}, & -1<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Найти константы a,b и плотность распределения $f_\xi(x)$.

Задача 2.3.6. Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины ξ определяется формулой $F_\xi(x)=A+B\cdot arctgx$, $-\infty<x<+\infty$. Найти константы A,B, плотность распределения $f_\xi(x)$ случайной величины ξ и вероятность $P(|\xi|>\sqrt{3})$.

Задача 2.3.7. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{Ax}{1+x^4}, & x>0;\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

Найти: а) константу A; б) интегральную функцию распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ; в) вероятность $P(0\le\xi\le 1)$.

Задача 2.3.8. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}A\sin x, & x\in[0,\pi];\\ 0, & x\notin[0,\pi].\end{cases}$$

Найти: а) константу A; б) интегральную функцию распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ; в) вероятность $P(0\le\xi\le\frac{\pi}{4})$.

Задача 2.3.9. Можно ли подобрать постоянную c так, чтобы функция $f(x)=cx^{-3}$ определяла плотность распределения вероятностей некоторой случайной величины на: а) отрезке $[-2,-1]$; б) луче $(0,+\infty)$?

Задача 2.3.10. Однородный провод длиной один метр растягивается за концы и разрывается. Случайная величина ξ - длина большего куска провода. Найти интегральную функцию распределения $F_{\xi}(x)$ с.в. ξ и построить ее график.

3. Числовые характеристики одномерных случайных величин

Занятие посвящено основным числовым характеристикам одномерных случайных величин.

3.1 Краткие теоретические сведения

Числовые характеристики случайной величины отражают наиболее важные особенности её законов распределения и всегда представляют собой некоторые константы. К числовым характеристикам случайной величины относятся математическое ожидание (среднее значение), дисперсия, среднее квадратичное отклонение (стандарт), моменты, квантили, медиана, мода и т.д. Далее подробнее рассмотрим основные числовые характеристики дискретных и непрерывных случайных величин.

Математическое ожидание $\mathrm{M}(\xi)$ или $\mathrm{M}\xi$ - это числовая характеристика, которая может служить ориентировочной оценкой положения значений случайной величины ξ на действительной оси и определяет некоторую точку, относительно которой происходит рассеивание случайной величины. Однако значение математического ожидания ничего не говорит о величине этого рассеивания. Отметим, что случайная величина может и не принимать значения, равного математическому ожиданию.

Математическое ожидание дискретной случайной величины ξ вычисляется по формулам:

$\mathrm{M}(\xi)=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k p_k$, где $p_k=\mathrm{P}(\xi=x_k)$ (если множество $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ значений с.в. ξ конечно);

$\mathrm{M}(\xi)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$, где $p_k=\mathrm{P}(\xi=x_k)$ (если множество $X=\{x_1,x_2,...\}$ значений с.в. ξ счетно и ряд сходится абсолютно). В противном случае считается, что математическое ожидание для дискретной случайной величины не существует.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины ξ вычисляется по формуле: $\mathrm{M}(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx$, где $f_\xi(x)$ - плотность распределения вероятностей с.в. ξ. Формула справедлива при условии $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f_\xi(x)dx<+\infty$, если интеграл не сходится абсолютно, то математическое ожидание не существует.

Основные свойства математического ожидания $\mathrm{M}\xi$**:**

1. Если $\xi = c = const$, то $\mathrm{M}c = c$.

2. Если $\mathrm{M}\xi$ существует, то $\mathrm{M}(c\xi) = c\mathrm{M}\xi,\ c = const$.

3. Если математические ожидания $\mathrm{M}\xi_1$ и $\mathrm{M}\xi_2$ существуют, то $\mathrm{M}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{M}\xi_1 + \mathrm{M}\xi_2$ для любых случайных величин ξ_1 и ξ_2.

4. Если ξ_1 и ξ_2 независимые случайные величины, для которых существуют математические ожидания $\mathrm{M}\xi_1$ и $\mathrm{M}\xi_2$, то $\mathrm{M}(\xi_1 \times \xi_2) = \mathrm{M}\xi_1 \times \mathrm{M}\xi_2$.

Дисперсией случайной величины ξ или характеристикой степени разброса возможных значений случайной величины около ее математического ожидания называется величина $\mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2$ и обозначается через $\mathrm{D}(\xi)$ или, ради простоты, через $\mathrm{D}\xi$. Здесь предполагается, что математическое ожидание $\mathrm{M}\xi$ существует.

Дисперсия дискретной случайной величины ξ вычисляется по формулам:

$\mathrm{D}\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(x_k - \mathrm{M}\xi\right)^2 p_k$, если множество $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ значений с.в. ξ конечно;

$\mathrm{D}\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(x_k - \mathrm{M}\xi\right)^2 p_k$, если множество $X = \{x_1, x_2, ...\}$ значений с.в. ξ счетно.

Дисперсия непрерывной случайной величины ξ вычисляется по формуле $\mathrm{D}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mathrm{M}\xi\right)^2 f_\xi(x)dx$, где $f_\xi(x)$ - плотность распределения вероятностей с.в. ξ.

Основные свойства дисперсии $\mathrm{D}\xi$**:**

1. Если $\xi = c = const$, то $\mathrm{D}c = 0$.

2. $\mathrm{D}(c\xi) = c^2\mathrm{D}\xi,\ c = const$.

3. Если ξ_1 и ξ_2 независимые случайные величины и существуют математические ожидания $\mathrm{M}\xi_1$ и $\mathrm{M}\xi_2$, то $\mathrm{D}(\xi_1 + \xi_2) = \mathrm{D}\xi_1 + \mathrm{D}\xi_2$.

4. Дисперсия неотрицательна $\mathrm{D}\xi \ge 0$.

Приведем еще одну формулу для вычисления дисперсии:

$$\mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi^2) - (\mathrm{M}\xi)^2.$$

Дисперсия $\mathrm{D}\xi$ имеет размерность квадрата случайной величины ξ. Поэтому часто для удобства в качестве меры разброса рассматривают **среднее квадратическое отклонение (стандарт)** $\sigma(\xi) = \sqrt{\mathrm{D}(\xi)}$ одномерной случайной величины. Размерность $\sigma(\xi)$ совпадает с размерностью самой случайной величины ξ.

Квантиль порядка p $(0 < p < 1)$ **случайной величины** ξ с интегральной функцией распределения $F_\xi(x)$ представляет собой такое число $\mathrm{Kp}\xi$, для которого имеет место соотношение $F_\xi(\mathrm{Kp}\xi) \le p \le F_\xi(\mathrm{Kp}\xi + 0)$.

Последнее условие можно записать в виде $\mathrm{P}(\xi < \mathrm{Kp}\xi) \le p$, $\mathrm{P}(\xi > \mathrm{Kp}\xi) \le 1 - p$. Таким образом, значения случайной величины ξ располагаются левее точки с абсциссой $\mathrm{Kp}\xi$ с вероятностью не больше p и располагаются правее этой же точки с вероятностью не больше $1 - p$.

Квантили существуют для любой случайной величины. При этом некоторые квантили могут совпадать для различных значений p, а некоторые – определяются неоднозначно.

Медианой случайной величины ξ**,** которая обозначается через $\mathrm{Me}(\xi)$ или $\mathrm{Me}\xi$, называется квантиль порядка $p = 0{,}5$, то есть $\mathrm{Me}\xi = \mathrm{K}_{1/2}\xi$.

Медиана $\mathrm{Me}\xi$ случайной величины ξ всегда существует, хотя иногда может быть определена неоднозначно. Медиана $\mathrm{Me}\xi$ удовлетворяет неравенствам вида: $\mathrm{P}(\xi < \mathrm{Me}\xi) \le 1/2$, $\mathrm{P}(\xi > \mathrm{Me}\xi) \le 1/2$.

В случае непрерывной случайной величины ξ, для которой $\mathrm{P}(\xi = \mathrm{Me}\xi) = 0$, медиана определяется из уравнения $F_\xi(\mathrm{Me}\xi) = \mathrm{P}(\xi < \mathrm{Me}\xi) = \mathrm{P}(\xi > \mathrm{Me}\xi) = 1/2$, где $F_\xi(x)$ - интегральная функция распределения с.в. ξ.

Модой $\mathrm{Mo}\xi$ **дискретной случайной величины** называется такое её возможное значение x_i, вероятность которого не меньше вероятностей соседних с ним значений, то есть выполняется $0 < p_{i-1} \le p_i$ и $p_i \ge p_{i+1} > 0$.

Модой $\mathrm{Mo}\xi$ **непрерывной случайной величины** ξ называется такое её значение $\tilde{x}$, которое доставляет плотности распределения $f_\xi(x)$ локальный максимум, то есть $f_\xi(\tilde{x}) \ge f_\xi(x) \ \ \forall x \in (\tilde{x}-\varepsilon, \tilde{x}+\varepsilon), \varepsilon > 0.$

Если мода единственна, то распределение случайной величины называется унимодальным, если мод несколько, то мультимодальным.

Рассмотрим новую числовую характеристику $\mathrm{Mo}^*(\xi)$ положения, которая называется **наивероятнейшим значением случайной величины** ξ. Обозначим её в сокращенной записи как $\mathrm{Mo}^*\xi$.

Пусть возможные значения дискретной случайной величины ξ занумерованы таким способом, что большему её значению соответствует больший номер. Обозначим через N_ξ множество номеров k, которые таким способом перечисляют все различные значения дискретной случайной величины ξ.

Для дискретной случайной величины ξ **наивероятнейшее значение** $\mathrm{Mo}^*\xi$ совпадает с её возможным значением x_r, для которого $p_r = \mathrm{P}(\xi = x_r) = \max\{p_k : k \in N_\xi\}$. На содержательном уровне характеристика $\mathrm{Mo}^*\xi$ означает, что вероятность попадания с.в. ξ в некоторую окрестность точки с абсциссой $\mathrm{Mo}^*\xi$ будет не меньше, чем вероятность её попадания в любую окрестность той же длины, которая не содержит эту точку.

Для непрерывной случайной величины ξ **наивероятнейшее значение** $\mathrm{Mo}^*\xi$ по определению удовлетворяет условию $f_\xi(\mathrm{Mo}^*\xi) \ge f_\xi(x)$ для всех $x \in R$, то есть $f_\xi(\mathrm{Mo}^*\xi)$ является наибольшим значением плотности $f_\xi(x)$.

На практике очень часто вводят числовые характеристики случайной величины, которые учитывают влияние маловероятных, но больших по абсолютной величине её значений. Эти характеристики называют начальными и центральными моментами случайной величины.

Начальным моментом *k*-го порядка случайной величины ξ называется математическое ожидание *k*-ой степени случайной величины, и он обозначается через $\alpha_k(\xi)$ или $\alpha_k\xi$, то есть $\alpha_k\xi = \mathrm{M}(\xi^k), k = 0,1,...$ Нетрудно видеть, что $\alpha_0(\xi) = \mathrm{M}(\xi^0) = \mathrm{M}(1) = 1$ и $\alpha_1(\xi) = \mathrm{M}(\xi^1) = \mathrm{M}(\xi)$. При $k \ge 2$ получим новые числовые характеристики случайной величины.

Для дискретной случайной величины начальный момент *k*-го порядка вычисляется по формуле $\alpha_k(\xi) = \mathrm{M}(\xi^k) = \sum_i (x_i)^k p_i$, $k = 0,1,\ldots$, здесь $x_1, x_2, \ldots$ - возможные значения с.в. ξ.

Для непрерывной случайной величины начальный момент *k*-го порядка вычисляется по формуле $\alpha_k(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f_\xi(x)dx$, $k = 0,1,\ldots$, здесь $f_\xi(x)$ - плотность распределения вероятностей с.в. ξ. Приведённые ряд и интеграл должны абсолютно сходиться. В противном случае начальные моменты, или не существуют, или не имеют конечного значения.

Центральным моментом *k*-го порядка случайной величины ξ при $|\mathrm{M}\xi| < \infty$ называется математическое ожидание *k*-ой степени отклонения случайной величины от её математического ожидания, и обозначается как $\beta_k(\xi)$ или $\beta_k\xi$, где $k = 0,1,\ldots$, то есть $\beta_k(\xi) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^k$. Легко найти, что $\beta_0(\xi) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^0 = 1$, $\beta_1(\xi) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^1 = 0$ и $\beta_2(\xi) = \mathrm{M}(\xi - \mathrm{M}\xi)^2 = \mathrm{D}\xi$ для любой случайной величины. При $k \geq 3$ уже получаем новые числовые характеристики с.в. ξ.

3.2 Примеры решения задач

Пример 3.2.1. Найти неизвестный параметр c, построить интегральную функцию распределения $F_\xi(x)$, вычислить математическое ожидание $\mathrm{M}\xi$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$, моду $\mathrm{Mo}\xi$, наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi$ и медиану $\mathrm{Me}\xi$ случайной величины ξ, если задан ее ряд распределения:

$\xi = x_i$	-4	-1	0	5
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	4c	2,5c	8c^2	0,5c

Решение: **Значение неизвестного параметра** c найдем из условия нормировки для ряда распределения:

$$1 = \sum_{k=1}^{4} p_k = \sum_{k=1}^{4} \mathrm{P}(\xi = x_k) = 4c + 2{,}5c + 8c^2 + 0{,}5c.$$

Приводим подобные члены и получаем уравнение $8c^2 + 7c - 1 = 0$.

Решая данное уравнение стандартным способом получаем $c_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{16}$.

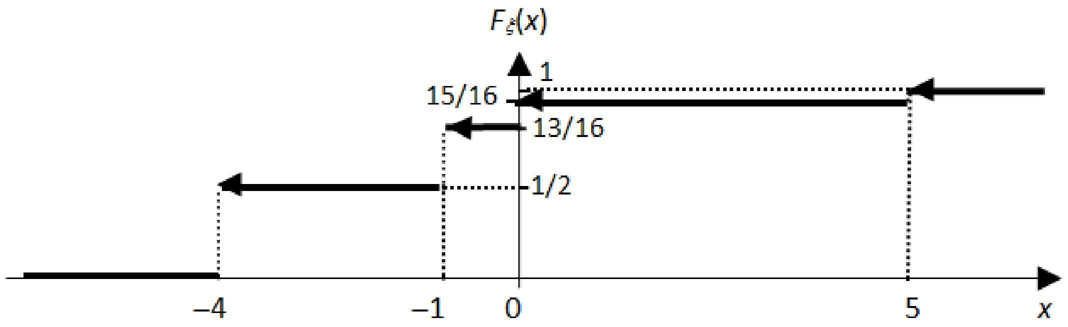
В итоге, с учетом неравенства $0 < c < 1$ остается единственное значение $c = \frac{1}{8}$. Следовательно, ряд распределения примет вид:

$\xi = x_i$	-4	-1	0	5
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Построим интегральную функцию распределения $F_\xi(x)$:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 1/2, & -4 < x \le -1; \\ 13/16, & -1 < x \le 0; \\ 15/16, & 0 < x \le 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

График интегральной функции распределения $F_\xi(x)$ имеет вид:



Вычислим математическое ожидание:

$$\mathrm{M}\xi = \sum_{k=1}^{4} x_k p_k = (-4) \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{5}{16} + 0 \cdot \frac{1}{8} + 5 \cdot \frac{1}{16} = -2.$$

Чтобы найти среднее квадратичное отклонение сначала надо вычислить дисперсию. Для этого можно воспользоваться одной из следующих формул:

$$\mathrm{D}\xi = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathrm{M}\xi)^2 \, p_k \text{ либо } \mathrm{D}\xi = \mathrm{M}(\xi^2) - (\mathrm{M}\xi)^2.$$

Используем вторую формулу, сначала найдем начальный момент второго порядка $\mathrm{M}(\xi^2)$

$$\mathrm{M}(\xi^2)=\sum_{k=1}^{4}\left(x_k\right)^2 p_k=(-4)^2\cdot\frac{1}{2}+(-1)^2\cdot\frac{5}{16}+0^2\cdot\frac{1}{8}+5^2\cdot\frac{1}{16}=9\frac{14}{16}.$$

Отсюда: $\mathrm{D}\xi=\mathrm{M}(\xi^2)-(\mathrm{M}\xi)^2=9\frac{14}{16}-(-2)^2=5\frac{14}{16}$.

И для **среднего квадратического отклонения** соответственно получаем:

$$\sigma(\xi)=\sqrt{\mathrm{D}(\xi)}=\sqrt{5\frac{14}{16}}\simeq 2{,}424.$$

Найдем медиану случайной величины. Медиана $\mathrm{Me}\xi$ удовлетворяет неравенствам вида: $\mathrm{P}(\xi<\mathrm{Me}\xi)\le 1/2$, $\mathrm{P}(\xi>\mathrm{Me}\xi)\le 1/2$. Проверим выполнение этих неравенств для всех значений случайной величины:

$$\mathrm{P}(\xi<-4)=F_\xi(-4)=0;$$

$$\mathrm{P}(\xi>-4)=1-\mathrm{P}(\xi<-4)-\mathrm{P}(\xi=-4)=\frac{1}{2};$$

$$\mathrm{P}(\xi<-1)=F_\xi(-1)=\frac{1}{2};$$

$$\mathrm{P}(\xi>-1)=1-\mathrm{P}(\xi<-1)-\mathrm{P}(\xi=-1)=1-\frac{1}{2}-\frac{5}{16}=\frac{3}{16};$$

$$\mathrm{P}(\xi<0)=F_\xi(0)=\frac{13}{16};$$

$$\mathrm{P}(\xi>0)=1-\mathrm{P}(\xi<0)-\mathrm{P}(\xi=0)=1-\frac{13}{16}-\frac{1}{8}=\frac{1}{16};$$

$$\mathrm{P}(\xi<5)=F_\xi(5)=\frac{15}{16};$$

$$\mathrm{P}(\xi>5)=1-\mathrm{P}(\xi<5)-\mathrm{P}(\xi=5)=1-\frac{15}{16}-\frac{1}{16}=0.$$

Таким образом, получаем, что в нашем случае медианой $\mathrm{Me}\xi$ может быть любое число x^*, удовлетворяющее условию $-4<x^*<-1$, это следует из неравенств $\mathrm{P}(\xi>-4)=\frac{1}{2}$ и $\mathrm{P}(\xi<-1)=\frac{1}{2}$, а также графика интегральной функции распределения.

Найдем моду $\mathrm{Mo}\xi$ случайной величины ξ, т.е. такое её возможное значение x_i, для которого выполняется $0 < p_{i-1} \le p_i$ и $p_i \ge p_{i+1} > 0$. Указанные неравенства есть смысл рассматривать только в случае $i = 2$, $i = 3$ и для этих значений они не имеют решения. Таким образом, мода для с.в. ξ не существует $\nexists \mathrm{Mo}\xi$.

Ищем **наивероятнейшее значение** $\mathrm{Mo}^*\xi$. Для нашей задачи $N_\xi = \{1, 2, 3, 4\}$. Легко проверить, что вероятность $p_1 = \mathrm{P}(\xi = x_1) = \max\{p_k : k \in N_\xi\} = \dfrac{1}{2}$. Поэтому наивероятнейшее значение случайной величины ξ равно $\mathrm{Mo}^*\xi = x_1 = -4$.

Ответ: $c = \dfrac{1}{8}$; $\mathrm{M}\xi = -2$; $\sigma(\xi) \simeq 2{,}424$; $\mathrm{Me}\xi = x^*, -4 < x^* < -1$; $\mathrm{Mo}\xi$ – не существует; $\mathrm{Mo}^*\xi = -4$;

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 1/2, & -4 < x \le -1; \\ 13/16, & -1 < x \le 0; \\ 15/16, & 0 < x \le 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Пример 3.2.2. Плотность распределения непрерывной случайной величины ξ имеет следующий вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} ax^2, & x \in [0, 4]; \\ 0 & x \notin [0, 4]. \end{cases}$$

Найти константу a, дисперсию, моду, медиану и наивероятнейшее значение с. в. ξ.

Решение: Чтобы найти **значение параметра** a будем использовать свойство нормировки для плотности распределения вероятностей:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f_\xi(x)dx + \int_{0}^{4} f_\xi(x)dx + \int_{4}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \int_0^4 ax^2 dx =$$

$$= a\frac{1}{3}x^3\Big|_0^4 = a\frac{64}{3} - 0 = \frac{64}{3}a. \text{ Отсюда } a = \frac{3}{64}.$$

И плотность распределения $f_\xi(x)$ окончательно перепишется следующим образом:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{64}x^2, & x\in[0,4];\\ 0 & x\notin[0,4].\end{cases}$$

Чтобы **вычислить дисперсию** воспользуемся формулой

$$\mathrm{D}\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-\mathrm{M}\xi\right)^2 f_\xi(x)dx.$$

Сначала необходимо найти математическое ожидание $\mathrm{M}\xi$ с. в. ξ.

$$\mathrm{M}(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf_\xi(x)dx=\int\limits_0^4 x\frac{3}{64}x^2dx=\frac{3}{64}\int\limits_0^4 x^3dx=\frac{3}{64}\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_0^4=\frac{3}{256}(256-0)=3.$$

Теперь можем вычислять дисперсию:

$$\mathrm{D}\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x-3\right)^2 f_\xi(x)dx=\frac{3}{64}\int\limits_0^4\left(x-3\right)^2x^2dx=\frac{3}{64}\int\limits_0^4\left(x^2-6x+9\right)x^2dx=$$

$$=\frac{3}{64}\int\limits_0^4\left(x^4-6x^3+9x^2\right)dx=\frac{3}{64}\left[\int\limits_0^4 x^4dx-6\int\limits_0^4 x^3dx+9\int\limits_0^4 x^2dx\right]=$$

$$=\frac{3}{64}\left[\frac{1}{5}x^5\Big|_0^4-\frac{6}{4}x^4\Big|_0^4+\frac{9}{3}x^3\Big|_0^4\right]=\frac{3}{64}\left[\frac{1024}{5}-\frac{1536}{4}+\frac{576}{3}\right]=0{,}6.$$

Ищем моду $\mathrm{Mo}\xi$ случайной величины ξ, то есть такое её значение $\tilde{x}$, для которого выполняется: $f_\xi(\tilde{x})\ge f_\xi(x)\ \ \forall x\in(\tilde{x}-\varepsilon,\tilde{x}+\varepsilon),\varepsilon>0$. Таким образом, в нашем случае необходимо найти локальный максимум плотности распределения вероятностей на отрезке $[0,4]$. Используем для этого стандартный прием. Находим первую производную функции $f_\xi(x)$ и приравниваем ее к нулю: $\left(f_\xi(x)\right)'=2\cdot\dfrac{3}{64}x=\dfrac{6}{64}x=0$.

Следовательно, точка $x=0$ подозрительная на экстремум. Находим вторую производную функции $f_\xi(x)$ и проверяем ее знак в точке $x=0$. $\left(f_\xi(x)\right)''=\dfrac{6}{64}>0$. Значит $x=0$ - локальный минимум функции $f_\xi(x)$. Получаем, что в нашем случае мода $\mathrm{Mo}\xi$ для с. в. ξ не существует.

Ищем наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi$, которое удовлетворяет условию $f_\xi(\mathrm{Mo}^*\xi) \geq f_\xi(x) \quad \forall x \in R$, то есть $f_\xi(\mathrm{Mo}^*\xi)$ является наибольшим значением плотности $f_\xi(x)$. Осталось проверить концы отрезка $[0,4]$. При $x=0$ достигается минимум функции $f_\xi(x)$, а при $x=4$ получаем наибольшее значение плотности распределения $f_\xi(4)=\frac{3}{4}$. В итоге получаем, что $\mathrm{Mo}^*\xi = 4$.

Найдем медиану случайной величины. В нашем случае медиана определяется из уравнения $F_\xi(\mathrm{Me}\xi)=\frac{1}{2}$. То есть сначала надо найти интегральную функцию распределения $F_\xi(x)$.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du = 0, \text{ при } x \leq 0.$$

$$F_\xi(x) = \int_0^x f_\xi(u)du = \int_0^x \frac{3}{64}u^2 du = \frac{3}{64}\cdot\frac{1}{3}u^3\Big|_0^x = \frac{1}{64}x^3, \text{ при } 0 < x \leq 4.$$

$$F_\xi(x) = \int_0^4 f_\xi(u)du + \int_4^x f_\xi(u)du = 1, \text{ при } x > 4.$$

Окончательно для $F_\xi(x)$ получаем:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{64}x^3, & 0 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Находим медиану $\mathrm{Me}\xi$ из условия $F_\xi(\mathrm{Me}\xi)=\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{64}\left(\mathrm{Me}\xi\right)^3 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Me}\xi = \sqrt[3]{32} \simeq 3{,}175.$$

Ответ: $a=\frac{3}{64}$; $\mathrm{D}\xi = 0{,}6$; $\mathrm{Me}\xi \simeq 3{,}175$; $\mathrm{Mo}\xi$ - не существует; $\mathrm{Mo}^*\xi = 4$.

3.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.3.1. Найти неизвестные параметры *x, p* и вычислить среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ случайной величины ξ, если задан ее ряд распределения

$\xi = x_i$	2	x	0	–2
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	0,1	0,2	0,6	p

и известно, что начальный момент 3-го порядка с. в. ξ равен b.

Задача 3.3.2. В каждом из трех наборов лежит по 10 конфет. При этом в первом наборе есть 3 конфеты в обертке, во втором – 2 и в третьем – 4. Из каждого набора взяли по одной конфете. Случайная величина ξ соответствует общему числу конфет в обертке, среди выбранных. Построить интегральную функцию распределения $F_\xi(x)$, найти медиану $\mathrm{Me}\xi$, моду $\mathrm{Mo}\xi$ и наивероятнейшее значение $\mathrm{Mo}^*\xi$ с. в. ξ.

Задача 3.3.3. В первой группе 24 студента, во второй – 22 и в третьей – 26. Из них девушек соответственно 18, 11 и 10. Для дежурства из каждой группы выбрали по одному человеку. Случайная величина ξ – общее число девушек среди выбранных студентов. Вычислить $\mathrm{M}\xi$ и $\mathrm{D}\xi$, используя свойства математического ожидания и дисперсии.

Задача 3.3.4. Случайная величина ξ имеет два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_2 > x_1$. Известно, что $\mathrm{P}(\xi = x_1) = 0{,}6$, $\mathrm{M}\xi = 1{,}4$, $\mathrm{D}\xi = 0{,}24$. Построить ряд распределения случайной величины ξ.

Задача 3.3.5. Пусть $\mathrm{M}(\xi) = 2$ и $\mathrm{D}(\xi) = 10$. Найти, используя свойства математического ожидания и дисперсии $\mathrm{M}(\eta)$ и $\mathrm{D}(\eta)$, если случайная величина $\eta = 2\xi + 5$.

Задача 3.3.6. Ряд распределения дискретной случайной величины ξ имеет вид:

$\xi = x_i$	–1	0	2	x
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,4

и известно, что математическое ожидание $\mathrm{M}(\xi) = 1$. Найти неизвестный параметр x, построить график интегральной функции распределения $F_\xi(x)$, вычислить среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ и начальный момент 3-го порядка $\alpha_3(\xi)$ случайной величины ξ.

Задача 3.3.7. Задан ряд распределения случайной величины ξ:

$\xi = x_i$	-1	x	3	5
$P(\xi = x_i)$	$4p$	$3p$	$2p$	p

и известно, что $D(\xi) = 4$. Найти неизвестные параметры x и p, вычислить математическое ожидание и начальный момент 2-го порядка с.в. ξ.

Задача 3.3.8. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} A(x^2 + 2x), & x \in [0,2]; \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

Найти константу A, математическое ожидание $M(\xi)$, моду $Mo(\xi)$ и наивероятнейшее значение $Mo^*(\xi)$ с. в. ξ.

Задача 3.3.9. Задана плотность распределения с. в. ξ:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} A\sin 2x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}]; \\ 0, & x \notin [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

Найти константу A, интегральную функцию распределения $F_\xi(x)$, математическое ожидание $M(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ с. в. ξ.

Задача 3.3.10. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} ax^2 e^{-bx}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases} \text{ где } a > 0, b > 0.$$

Найти математическое ожидание и моду $Mo(\xi)$ случайной величины ξ.

Задача 3.3.11. Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины ξ имеет следующий вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -a; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{a}, & -a < x \le a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

Найти квантиль $x_{0,75}$ и медиану с.в. ξ.

Задача 3.3.12. Найти математическое ожидание и дисперсию а) числа очков выпадающих при бросании одной игральной кости; б) суммы очков, выпадающих при бросании n игральных костей.

Задача 3.3.13. Интегральная функция распределения непрерывной случайной величины ξ определяется формулой:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти и медиану $\mathrm{Me}(\xi)$ с. в. ξ.

Задача 3.3.14. Задана плотность распределения с. в. ξ:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1{,}5x^2, & x \in [0,1]; \\ 1{,}5(2-x)^2, & x \in (1,2]; \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

Найти для случайной величины ξ начальные и центральные моменты первых трех порядков.

Задача 3.3.15. Интегральная функция распределения дискретной случайной величины ξ имеет следующий вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2; \\ 0{,}3, & 2 < x \le 3; \\ 0{,}5, & 3 < x \le 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Построить ряд распределения, найти математическое ожидание $\mathrm{M}(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ с.в. ξ.

4. Функциональные зависимости от одномерных случайных величин

Занятие посвящено функциональным зависимостям от одномерных случайных величин.

4.1 Краткие теоретические сведения

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P}(\bullet))$ заданы две случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$, для которых справедливо функциональное соотношение вида $\eta = g(\xi)$. Здесь $g(x)$ некоторая заданная функция на R со значениями в R. При этом случайную величину $\eta = g(\xi)$ называют **функцией от случайного аргумента** $\xi(\omega)$.

Пусть на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P}(\bullet))$ задана случайная величина $\xi(\omega): \Omega \to R$ и измеримая функция $y = g(x): R \to R$. **Тогда объект вида** $\eta(\omega) = g(\xi(\omega))$ **является случайной величиной**.

В общем случае вычисления законов распределения для случайной величины $\eta(\omega)$ очень громоздки. Поэтому рассмотрим конкретные задачи, когда тестовые случайные величины и функциональные зависимости удовлетворяет дополнительным ограничениям, и в этом случае получим законы распределения для случайной величины $\eta(\omega)$. Более подробно все необходимые теоретические сведения изложены, например, в [1,2]. Рассмотрим отдельно дискретную и непрерывную случайные величины.

Пусть на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P}(\bullet))$ задана дискретная случайная величина $\xi(\omega): \Omega \to R$ со счетным множеством значений $X = \{x_1, x_2, ...\}$ и случайная величина $\eta(\omega) = g(\xi(\omega)): \Omega \to R$, где $g(x): R \to R$ - однозначное отображение. Обозначим через $Y = \{y_1, y_2, ...\}$ множество различных значений случайной величины $\eta(\omega)$.

В случае дискретной случайной величины $\xi(\omega)$ ***на функцию*** $g(x)$ ***никаких дополнительных ограничений не накладывается.***

Вычислим законы распределения случайной величины $\eta(\omega)$ через законы распределения случайной $\xi(\omega)$. Для с. в. $\xi(\omega)$ с известной интегральной функцией $F_\xi(x)$ можно задать следующее распределение вероятностей: $p_i = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}) = F_\xi(x_i + 0) - F_\xi(x_i)$, $i = 1, 2, ...$ Обозначим распределение для с. в. $\eta(\omega)$ через $q_j = \mathrm{P}(\{\omega : \eta(\omega) = y_j\})$, $j = 1, 2, ...$

Законы распределения вероятностей для дискретной случайной величины $\eta(\omega)$ **могут быть найдены по следующим формулам:**

$$q_j = \mathrm{P}(\{\omega : \eta(\omega) = y_j\}) = \sum_{i:g(x_i)=y_j} \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}) = \sum_{i:g(x_i)=y_j} p_i ;$$

$$F_\eta(y) = \mathrm{P}(\{\omega : \eta(\omega) < y\}) = \sum_{j:y_j<y} q_j = \sum_{j:y_j<y} \sum_{i:g(x_i)=y_j} p_i, \ \ y \in R.$$

Пусть теперь на $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P}(\bullet))$ задана **непрерывная случайная величина** $\xi(\omega)$ с функцией распределения $F_\xi(x) = \mathrm{P}(\{\omega : \xi(\omega) < x\})$ и плотностью вероятности $f_\xi(x) = \dfrac{dF_\xi(x)}{dx}$. Также известно, что случайная величина $\eta(\omega) = g(\xi(\omega)) : \Omega \to R$, где $g(x) : R \to R$. Причем $g(x)$ ***строго монотонна на всей области определения*** и имеет первую производную. В этом случае для функции $y = g(x)$ существуют обратная функция $x = \varphi(y)$ и ее производная $\varphi'(y) = \dfrac{d\varphi(y)}{dy}$.

Найдём интегральную функцию распределения $F_\eta(y) = \mathrm{P}(\{\omega : \eta(\omega) < y\})$ и плотность распределения вероятности $f_\eta(y)$ для непрерывной с. в. $\eta(\omega)$. Рассмотрим два случая.

1. ***Функция*** $g(x)$ ***строго возрастает на всей области определения.***

В этом случае **интегральная функция** $F_\eta(y)$ с. в. $\eta(\omega)$ вычисляется по формуле $F_\eta(y) = \mathrm{P}(\{\omega : \eta(\omega) < y\}) = \int\limits_{-\infty}^{\varphi(y)} f_\xi(u)du$,

а плотность распределения вероятности $f_\eta(y)$ с. в. $\eta(\omega)$ по формуле $f_\eta(y) = \dfrac{dF_\eta(y)}{dy} = f_\xi(\varphi(y))\varphi'(y)$.

2. ***Функция*** $g(x)$ ***строго убывает на всей области определения.***

В этом случае **интегральная функция** $F_\eta(y)$ с. в. $\eta(\omega)$ вычисляется по формуле $F_\eta(y) = \mathrm{P}(\{\omega : \eta(\omega) < y\}) = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\varphi(y)} f_\xi(u)du$,

а плотность распределения вероятности $f_\eta(y)$ с. в. $\eta(\omega)$ по формуле $f_\eta(y) = \dfrac{dF_\eta(y)}{dy} = -f_\xi(\varphi(y))\varphi'(y)$.

Плотность распределения вероятности $f_\eta(y)$ непрерывной **случайной величины** $\eta(\omega)$, в общем случае, вычисляется соответственно по формуле: $f_\eta(y)=f_\xi(\varphi(y))|\varphi'(y)|$. Здесь y принимает значения из промежутка значений случайной величины $\eta(\omega)$. В остальной части действительной прямой плотность вероятности $f_\eta(y)$ равна нулю.

Предположим, что **функции** $g(x)$ **является кусочно-монотонной** и дифференцируемой на области определения. В этом случае всю область определения D функции $y=g(x)$ представляем в виде $D=D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_k$, где $D_i, i=\overline{1,k}$ - непересекающиеся участки монотонности функции $y=g(x)$, на которых данная функция принимает все значения из промежутка $\tilde{D}$ (рис. 4.1).

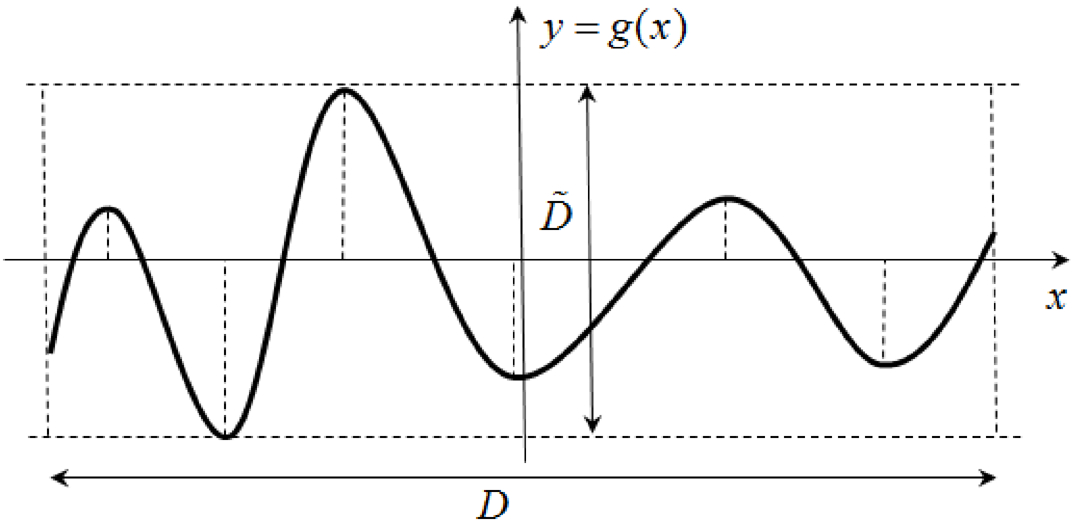


Рис. 4.1

На каждом участке D_i находим соответствующую обратную функцию $x=\varphi_i(y)$, и тогда

$$f_\eta(y)=\sum_{i=1}^{k} f_\xi(\varphi_i(y))|\varphi_i'(y)|;\quad F_\eta(y)=\mathrm{P}(\{\omega:\eta(\omega)<y\})=\int_{-\infty}^{y} f_\eta(y)dy.$$

Таким образом, выделяя участки монотонного возрастания и участки монотонного убывания можно найти плотность вероятности и интегральную функцию распределения для случайной величины $\eta(\omega)$.

4.2 Примеры решения задач

Пример 4.2.1. Случайная величина ξ имеет следующий ряд распределения:

$\xi = x_i$	-4	-3	-1	1	2	3
$p_i = \mathrm{P}(\xi = x_i)$	0,1	0,15	0,2	0,15	0,15	0,25

Задано отображение $y = g(x) = |x+1|$. Найти закон распределения случайной величины $\eta = g(\xi) = |\xi + 1|$.

Решение: Случайная величина η будет принимать значения $3,\ 2,\ 0,\ 0,\ 3,\ 4$, которые соответствуют различным значениям случайной величины ξ. При этом различных значений для с. в. η существует четыре: $y_1 = 0, y_2 = 2, y_3 = 3, y_4 = 4$. Вероятности q_j для случайной величины η легко вычисляются:

$$q_1 = \mathrm{P}(\eta = y_1) = \mathrm{P}(\eta = 0) = \sum_{i:|x_i+1|=0} p_i = \sum_{i:x_i=-1} p_i = p_3 = 0,2;$$

$$q_2 = \mathrm{P}(\eta = 2) = \sum_{i:|x_i+1|=2} p_i = \sum_{i:\{x_i=-3\}\cup\{x_i=1\}} p_i = p_2 + p_4 = 0,15 + 0,15 = 0,3;$$

$$q_3 = \mathrm{P}(\eta = 3) = \sum_{i:|x_i+1|=3} p_i = \sum_{i:\{x_i=-4\}\cup\{x_i=2\}} p_i = p_1 + p_5 = 0,15 + 0,1 = 0,25;$$

$$q_4 = \mathrm{P}(\eta = y_4) = \mathrm{P}(\eta = 4) = \sum_{i:|x_i+1|=4} p_i = \sum_{i:x_i=3} p_i = p_6 = 0,25.$$

Проверим свойство нормировки для полученных вероятностей $\mathrm{P}(\eta = y_j)$: $\sum_{j=1}^{4} \mathrm{P}(\eta = y_j) = \sum_{j=1}^{4} q_j = 0,2 + 0,3 + 0,25 + 0,25 = 1$.

В итоге ряд распределения с. в. η примет следующий вид:

$\eta = y_j$	0	2	3	4
$q_j = \mathrm{P}(\eta = y_j)$	0,2	0,3	0,25	0,25

Пример 4.2.2. Плотность распределения случайной величины ξ равна $f_\xi(x), 0 < x < +\infty$. Чему равна плотность распределения $f_\eta(y)$ случайной величины $\eta = \ln \xi$?

Решение: Функция $y = g(x) = \ln x$ монотонно возрастает на всем луче $0 < x < +\infty$, причем y принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Обратная к $g(x)$ функция $x=\varphi(y)=e^y$, ее производная $\varphi'(y)=e^y$. Далее находим плотность распределения $f_\eta(y)$:

$$f_\eta(y)=f_\xi(\varphi(y))|\varphi'(y)|=f_\xi\left(e^y\right)\cdot e^y, -\infty<y<+\infty.$$

Ответ: $f_\eta(y)=f_\xi\left(e^y\right)\cdot e^y, -\infty<y<+\infty$.

Пример 4.2.3. Найти плотность распределения случайной величины $\eta=\xi^2$, если случайная величина ξ имеет следующую плотность распределения: $f_\xi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\dfrac{-x^2}{2\sigma^2}\right), \sigma>0, -\infty<x<+\infty$.

Решение: Для функции $y=g(x)=x^2$ (рис. 4.2) можно выделить два полуинтервала монотонности $D_1=(-\infty,0]$ и $D_2=[0,+\infty)$ монотонности.

Найдем на этих промежутках обратные функции $x=\varphi(y)$.

На $D_1=(-\infty,0]$ обратная функция имеет вид $x=\varphi_1(y)=-\sqrt{y}$ и ее производная $\varphi_1'(y)=-\dfrac{1}{2}(y)^{-\frac{1}{2}}$.

На $D_2=[0,+\infty)$ обратная функция имеет вид $x=\varphi_2(y)=+\sqrt{y}$ и ее производная $\varphi_2'(y)=\dfrac{1}{2}(y)^{-\frac{1}{2}}$.

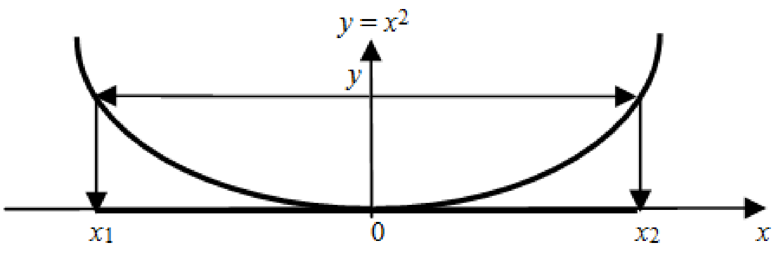


Рис. 4.2

Интегральная функция распределения $F_\eta(y)$ для случайной величины η при $y>0$ вычисляется следующим образом: $F_\eta(y)=\mathrm{P}(\eta<y)=\mathrm{P}\left(\{\varphi_1(y)<\xi<0\}\cup\{0\le\xi<\varphi_2(y)\}\right)=$

$$=\mathrm{P}\left(\varphi_1(y)<\xi<0\right)+\mathrm{P}\left(0\le\xi<\varphi_2(y)\right)=\int\limits_{\varphi_1(y)}^{0} f_\xi(x)dx+\int\limits_{0}^{\varphi_2(y)} f_\xi(x)dx=$$

$$= \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f_\xi(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)dx = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)dx.$$

Так как $\eta = \xi^2 \ge 0$, то при $y \le 0$ интегральная функция распределения $F_\eta(y) = \mathrm{P}(\eta < y) = \mathrm{P}(\varnothing) = 0$.

Далее находим плотность распределения с. в. η по формуле $f_\eta(y) = \dfrac{dF_\eta(y)}{dy}$.

При $y \le 0$ $f_\eta(y) = 0$.

При $y > 0$ $f_\eta(y) = \dfrac{dF_\eta(y)}{dy} = \dfrac{d}{dy}\left[\dfrac{1}{\sigma}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int\limits_{0}^{\sqrt{y}} \exp\left(\dfrac{-x^2}{2\sigma^2}\right)dx\right]$.

Далее используем известную формулу Лапласа:

$$\frac{d}{dy}\left(\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f_\xi(x)dx\right) = f_\xi(\varphi_2(y))\varphi_2'(y) - f_\xi(\varphi_1(y))\varphi_1'(y).$$

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\sqrt{y}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)dx\right] = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\exp\left(\frac{-(\sqrt{y})^2}{2\sigma^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{y}} - 0\right] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}.$$

Ответ: $f_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}, & y > 0; \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$

4.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.3.1. Закон распределения случайной величины ξ задан в виде таблицы:

$\xi = x_i$	–3	–1	0	1	3	10
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	1/12	1/12	1/6	1/6	1/3	1/3

Найти закон распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

Задача 4.3.2. Непрерывная случайная величина ξ имеет интегральную функцию распределения $F_\xi(x)=1-e^{-x}, x>0$. Найти интегральную функцию распределения $F_\eta(y)$ и плотность распределения $f_\eta(y)$ случайной величины $\eta = e^{-\xi}$.

Задача 4.3.3. Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения:

$\xi = x_i$	0	$\pi/6$	$\pi/2$	$5\pi/6$	π
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	0,1	0,3	0,1	0,2	0,3

Найти ряд распределения случайной величины $\eta = \sin\xi$.

Задача 4.3.4. Закон распределения случайной величины ξ задан в виде таблицы:

$\xi = x_i$	–4	–3	–1	1	2	3
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	1/12	1/12	1/6	1/6	1/3	1/3

Найти ряды распределения с. в. $\eta = 2\xi$ и $\eta = |\xi|$.

Задача 4.3.5. Закон распределения дискретной случайной величины ξ имеет вид: $\mathrm{P}(\xi = k) = \dfrac{1}{2n+1}, k = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n$ (n - натуральное число). Найти закон распределения с. в. η, если а) $\eta = \xi^2$; б) $\eta = |\xi| + \xi$.

Задача 4.3.6. Пусть $F_\xi(x)$ и $f_\xi(x)$ соответственно интегральная функция распределения и плотность распределения случайной величины ξ. Найти интегральную функцию распределения $F_\eta(y)$ и плотность распределения $f_\eta(y)$ случайной величины η, если: а) $\eta = \xi + 1$, б) $\eta = \xi - 2$, в) $\eta = -\xi$.

Задача 4.3.7. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}, & x \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}); \\ 0, & x \notin (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}). \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f_\eta(y)$ случайной величины $\eta = \frac{1}{2}\sin\xi$ и вычислить вероятность $\mathrm{P}(\frac{1}{2} < \eta < \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Задача 4.3.8. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} cx^{-3}, & x \geq 2; \\ 0, & x < 2. \end{cases}$$

Найти: а) постоянную c, б) плотность распределения случайной величины $\eta = \frac{1}{\xi}$, б) вероятность $\mathrm{P}(0{,}1 \leq \eta < 0{,}3)$.

Задача 4.3.9. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0{,}1); \\ 0, & x \notin (0{,}1). \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f_\eta(y)$ случайной величины η, если: а) $\eta = 2\xi + 1$ б) $\eta = -\ln(1-\xi)$.

Задача 4.3.10. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид: $f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0; \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ где $\lambda > 0$. Найти плотность распределения $f_\eta(y)$ случайной величины η, если: а) $\eta = \sqrt{\xi}$ б) $\eta = \frac{1}{\lambda}\ln\xi$.

5. Наиболее распространенные дискретные случайные величины

Занятие предназначено для ознакомления студентов с наиболее распространенными законами распределения дискретных случайных величин.

5.1 Краткие теоретические сведения

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P}(\bullet))$ есть основное вероятностное пространство произвольного статистически устойчивого эксперимента E. Считаем, что все рассматриваемые ниже случайные объекты задается на нем.

Биномиальное распределение

Биномиальное распределение возникает при реализации схемы независимых испытаний (схемы Бернулли), когда один и тот же опыт повторяется независимым образом n раз. В результате каждого такого опыта может появиться или не появиться некоторое событие A соответственно с вероятностями $0 < p < 1$ и $q = 1 - p$.

Пусть случайная величина ξ соответствует числу появлений события в серии из независимых испытаний. Вероятность $\mathrm{P}(\xi = m)$ появления события A ровно m раз в серии из n независимых испытаний часто обозначают как $\mathrm{P}_n(m)$. Дискретная случайная величина ξ **называется биномиальной**, и ее ряд распределения имеет следующий вид:

$$\mathrm{P}_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0,1,\ldots,n, \quad q = 1 - p.$$

Приведем основные числовые характеристики для биномиального распределения: математическое ожидание $\mathrm{M}\xi = np$, дисперсия $\mathrm{D}\xi = npq$.

Примером биномиальной случайной величины может служить: 1) число выпадения гербов при несколько последовательных бросках монеты; 2) число выпадений 6-ти очков при многократном бросании игральной кости; 3) количество вынутых картинок при шестикратном извлечении карты из игральной колоды при условии, что вынутая карта каждый раз возвращается в колоду, и карты тщательно перемешиваются.

Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина ξ **распределена по закону Пуассона**, если

$$p_m = \mathrm{P}(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0,1,\ldots,n, \quad \lambda > 0.$$

Основные числовые характеристики для распределения Пуассона: математическое ожидание $\mathrm{M}\xi = \lambda$, дисперсия $\mathrm{D}\xi = \lambda$.

Приведём примеры такого рода случайных величин: 1) число частиц, испускаемых радиоактивным изотопом за единицу времени; 2) число вызовов, поступающих на автоматическую телефонную станцию за единицу времени; 3) число элементов сложного устройства, отказавших в течение заданного отрезка времени; 4) число электронов, вылетевших с катода электронной лампы за определённый промежуток времени; 5) число автомашин, прибывающих к изолированному перекрестку за единицу времени.

Распределение Бернулли

Дискретная случайная величина ξ имеет **распределение Бернулли**, если она принимает два значения 1 и 0 с вероятностями $0<p<1$ и $q=1-p$ соответственно, и ее ряд распределения имеет следующий вид:

$\xi = x_i$	0	1
$\mathrm{P}(\xi = x_i)$	$q=1-p$	p

Вероятность $0<p<1$ является параметром распределения Бернулли. Основные числовые характеристики для распределения Бернулли: математическое ожидание $\mathrm{M}\xi = p$, дисперсия $\mathrm{D}\xi = pq$.

Если $\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, где $\xi_i, i=\overline{1,n}$ - последовательность из n случайных величин, распределенных по закону Бернулли, тогда с. в. ξ имеет биномиальное распределение с параметрами n, p.

Геометрическое распределение

Геометрическое распределение возникает, когда один и тот же опыт повторяется независимым образом до первого появления некоторого события A. В результате каждого такого опыта событие A может появиться или не появиться соответственно с вероятностями $0<p<1$ и $q=1-p$. Случайная величина ξ, соответствующая числу повторов опыта имеет **геометрическое распределение** и для нее выполняется:

$$p_k = \mathrm{P}(\xi = k) = q^{k-1}p,\ \ k=1,2,...,\ \ q=1-p.$$

Основные числовые характеристики для геометрического распределения: математическое ожидание $\mathrm{M}\xi = \dfrac{1}{p}$, дисперсия $\mathrm{D}\xi = \dfrac{q}{p^2}$.

Примером такого рода случайной величины может служить: 1) число бросков симметричной монеты до первого выпадения герба; 2) число произведенных независимых выстрелов до первого попадания в мишень; 3) число циклов работы радиолокатора без корректировки до первого обнаружения объекта.

Гипергеометрическое распределение

Предположим, что есть набор из n объектов, среди которых k имеют дефект. Из этого набора выбирают m объектов. Тогда случайная величина ξ,соответствующая количеству бракованных объектов среди выбранных, имеет **гипергеометрическое распределение**. Для ξ выполняется:

$$\mathrm{P}(\xi = s) = \frac{C_k^s C_{n-k}^{m-s}}{C_n^m}, \ \ 0 \le m \le n, \ \ 0 \le s \le k\,.$$

Основные числовые характеристики для гипергеометрического распределения: математическое ожидание $\mathrm{M}\xi = \dfrac{m \cdot k}{n}$, дисперсия

$$\mathrm{D}\xi = \frac{m \cdot \left(\dfrac{k}{n}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{k}{n}\right) \cdot (n-m)}{n-1}.$$

5.2 Примеры решения задач

Пример 5.2.1. Два игральные кости одновременно подбрасываются 10 раз. Случайная величина ξ - число появлений одинакового числа очков на обеих костях. Определить закон распределения с. в. ξ, найти его параметры и записать формулу.

Решение: Из условий задачи следует, что случайная величина ξ может принимать возможные значения из множества $\{0,1,2,...,10\}$, значит, она является дискретной.

Там же сказано, что один и тот же опыт, заключающийся в бросании пары игральных костей, повторяется независимым образом 10 раз. В результате каждого такого опыта может появиться или не появиться событие A, соответствующее совпадению числа очков на подброшенных костях. Нас интересует число появлений события A в серии из 10 испытаний. Таким образом, очевидно, что наша случайная величина должна иметь биномиальное распределение $\mathrm{P}(\xi = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, q = 1 - p$, параметрами которого являются числа n и p. В нашей задаче $n = 10$. Осталось определить параметр p, соответствующий совпадению числа очков на двух костях при одном бросании. Для этого введем в рассмотрение следующие независимые события:

$A_i = \{$на первой кости выпало i очков$\}$, $i = \overline{1,6}$;

$B_i = \{$на второй кости выпало i очков$\}$, $i = \overline{1,6}$.

Очевидно, $\mathrm{P}(A_i) = \mathrm{P}(B_i) = \dfrac{1}{6}$, $i = \overline{1,6}$.

Тогда $p = \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A_1B_1 \cup A_2B_2 \cup A_3B_3 \cup A_4B_4 \cup A_5B_5 \cup A_6B_6) =$

$$= \sum_{i=1}^{6} \mathrm{P}(A_iB_i) = \sum_{i=1}^{6} \mathrm{P}(A_i)\mathrm{P}(B_i) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Отсюда $q = 1 - p = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$.

Окончательно формула для распределения случайной величины ξ запишется следующим образом:

$$\mathrm{P}(\xi = m) = C_{10}^{m} \left(\frac{1}{6}\right)^{m} \left(\frac{5}{6}\right)^{10-m}, \quad m = \overline{0,10}.$$

Ответ: Дискретная случайная величина ξ является биномиальной, ее закон распределения имеет вид:

$$\mathrm{P}(\xi = m) = C_{10}^{m} \left(\frac{1}{6}\right)^{m} \left(\frac{5}{6}\right)^{10-m}, \quad m = \overline{0,10}.$$

Пример 5.2.2. На автоматическую телефонную станцию (АТС) за одну минуту поступает случайное число вызовов по закону Пуассона. При этом известно, что среднее число вызовов за одну минуту равно 10. Найти вероятность того, что за одну минуту поступит: а) ровно два вызова; б) менее двух вызовов; в) не менее двух вызовов.

Решение: Пусть случайная величина ξ соответствует числу вызовов, поступающих на АТС за одну минуту. Из условий задачи получаем, что распределение с. в. ξ подчиняется закону Пуассона:

$$\mathrm{P}(\xi = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0,1,\ldots,n, \quad \lambda > 0.$$

Причем известно, что $\mathrm{M}\xi = 10$. С другой стороны для пуассоновской случайной величины известно, что $\mathrm{M}\xi = \lambda$, следовательно $\lambda = 10$.

Таким образом, для с. в. ξ получаем:

$$\mathrm{P}(\xi = m) = \frac{10^m}{m!} e^{-10}, \quad m = 0,1,\ldots,n.$$

Отсюда находим требуемые вероятности.

а) $P(\xi = 2) = \dfrac{10^2}{2!} e^{-10} \approx 0{,}002270$.

б) $P(\xi < 2) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) = \dfrac{10^0}{0!} e^{-10} + \dfrac{10^1}{1!} e^{-10} \approx 0{,}000495$.

в) $P(\xi \geq 2) \approx 0{,}999505$.

Ответ: а) $P(\xi = 2) \approx 0{,}002270$; б) $P(\xi < 2) \approx 0{,}000495$; в) $P(\xi \geq 2) \approx 0{,}999505$.

5.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.3.1. Из набора костей домино (28 шт.) берут с возвращением по две кости. Опыт проделывают до тех пор, пока не будут выбраны одновременно два дупеля. Случайная величина ξ - число проведенных извлечений. Определить тип распределения с.в. ξ, найти неизвестные параметры и записать его формулу.

Задача 5.3.2. По каналу связи передается 10 сообщений, причем каждое сообщение независимо от других искажается с вероятностью 0,2. Найти среднее число искаженных сообщений в последовательности из 10 сообщений и вероятность того, что будет искажено не менее трех сообщений.

Задача5.3.3. При каждом цикле работы радиолокатора (независимо от других циклов) объект обнаруживается с вероятностью 0,3. Случайная величина ξ – число циклов обзора до обнаружения объекта. Определить тип распределения с. в. ξ, записать его формулу, найти математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию с. в. $D\xi$.

Задача5.3.4. В лотерее среди 20 билетов участвуют 5 выигрышных. Игрок покупает 7 билетов. Случайная величина ξ соответствует числу выигрышных билетов среди купленных. Найти математическое ожидание числа выигрышных билетов $M\xi$, вероятность того, что среди купленных будет а) менее трех выигрышных билетов, б) не менее трех выигрышных билетов.

Задача 5.3.5. Два игральных кубика одновременно подбрасываются 15 раз. Случайная величина ξ - число выпадений суммы в одиннадцать очков на обоих кубиках. Определить закон распределения с. в. ξ, найти его параметры и записать формулу.

Задача 5.3.6. В течение некоторого времени испытывают на надежность 10 приборов. Вероятность выхода из строя каждого прибора, независимо от других равна 0,15. Случайная величина ξ - число отказавших приборов. Найти дисперсию с.в. ξ и вероятность $P(\xi < 2)$.

Задача 5.3.7. К стоп-линии светофора по некоторому направлению подъезжают машины с интенсивностью λ. Случайная величина ξ соответствует числу машин, прибывших за t секунд. Известно, что с. в. ξ распределена по закону Пуассона с параметром λt. Найти среднее число машин, подъезжающих к стоп-линии светофора за10 секунд и вероятность, того, что за это время подъедет не более двух машин, если $\lambda = 0,5$.

Задача 5.3.8. Симметричная монета подбрасывается 14 раз. Рассматривается случайная величина ξ – число выпавших гербов. Определить тип распределения с. в. ξ и построить ее ряд распределения.

Задача 5.3.9. Симметричная монета подбрасывается до выпадения первого герба. Случайная величина ξ - число произведенных бросков. Определить тип распределения, найти его параметры и записать формулу.

Задача 5.3.10. Производится n независимых опытов, в каждом из которых с вероятностью p может произойти событие A. Рассматривается случайная величина ξ - число наступлений события $\overline{A}$ (противоположного к A) в n опытах. Определить тип распределения с. в. ξ и найти ее ряд распределения.

6. Тестовые непрерывные случайные величины

Занятие посвящено наиболее часто встречающимися на практике законами распределения непрерывных случайных величин.

6.1 Краткие теоретические сведения

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathrm{P}(\bullet))$ есть основное вероятностное пространство произвольного статистически устойчивого эксперимента E. Считаем, что все рассматриваемые ниже случайные объекты задается на нем.

Нормальный закон распределения (закон Гаусса)

Основная особенность, выделяющая нормальный закон среди других законов непрерывного типа, состоит в том, что он является предельным, к которому приближаются другие законы распределений при весьма часто встречающихся типичных условиях. Непрерывная случайная величина ξ подчинена **нормальному закону распределения или закону Гаусса**, если её плотность имеет следующий вид:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < a < +\infty,\ 0 < \sigma < +\infty.$$

Здесь a и σ есть параметры распределения. В связи с этим будем также говорить, что непрерывная величина ξ является (a,σ) - нормальной или имеет $N(a,\sigma)$ распределение. Общий вид кривой распределения закона Гаусса определяется параметрами $-\infty < a < +\infty$ и $0 < \sigma < +\infty$, примерный график представлен на рис. 6.1.

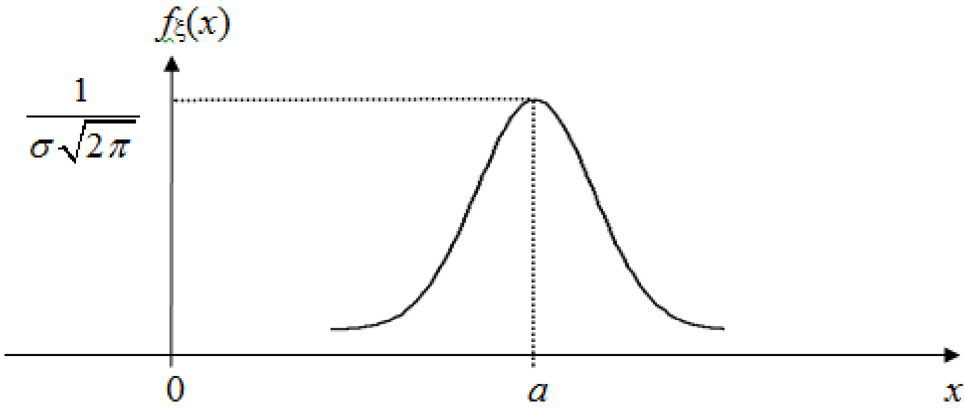


Рис.6.1

Приведем **основные числовые характеристики для нормального распределения**: математическое ожидание $\mathrm{M}(\xi) = a$, дисперсия $\mathrm{D}(\xi) = \sigma^2$, и значит, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi) = \sigma$.

Также для нормальной случайной величины ξ рассматривается такая числовая характеристика, как **срединное (вероятное) отклонение**, обозначаемое через $C(\xi)$. **Срединным отклонением** $C(\xi)$ называется половина длины интервала с центром в точке с абсциссой $\mathrm{M}(\xi)$, вероятность попадания в который для с. в. ξ равна $\frac{1}{2}$. Установлена связь между срединным $C(\xi)$ и средним квадратическим отклонением $\sigma(\xi)=\sigma$ нормальной случайной величины ξ: $C(\xi)\approx 0,6745\sigma$.

На практике часто используется стандартная или $(0,1)$ - **нормальная случайная величина** $\eta=\frac{(\xi-a)}{\sigma}$, где ξ - случайная величина с $N(a,\sigma)$ распределением. Нормальная с. в. η имеет плотность распределения $f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$. То есть она также распределена по закону Гаусса с параметрами $a=0,\sigma=1$.

Для **вероятности попадания** случайной величины ξ с $N(a,\sigma)$ распределением **в интервал**, имеют место следующие соотношения:

$$\mathrm{P}(c\le\xi<d)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right)\right];$$

$$\mathrm{P}(a-b\le\xi<a+b)=\Phi\left(\frac{b}{\sigma}\right), \text{ если } b>0.$$

Здесь $\Phi(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^x\exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}dt$ - функция Лапласа, для которой составлены таблицы (например в [1] и [2]) и хорошо известны её свойства: $\Phi(0)=0$, $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, $\Phi(+\infty)=1$, $\Phi(-\infty)=-1$.

Для нормальной случайной величины ξ справедливо **«правило трёх сигм»**, т. е. вероятность $\mathrm{P}(|\xi-a|<3\sigma)=\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=\Phi(3)$. По таблицам для функции Лапласа находим, что $\Phi(3)\approx 0,9973\approx 1$. Отсюда получаем: $\mathrm{P}(|\xi-a|\ge 3\sigma)\approx 0,0027$.

Среднее квадратическое отклонение и математическое ожидание нормальной случайной величины ξ позволяет указать интервал $(a-3\sigma,a+3\sigma)$ её практически достоверных значений.

Интегральная функция распределения для (a,σ) - нормальной случайной величины ξ может быть вычислена по формуле:

$$F_\xi(x) = \mathrm{P}(-\infty < \xi < x) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+1\right].$$

Таким образом, с помощью таблицы функции Лапласа можно вычислять значения и интегральной функции $F_\xi(x)$.

Приведем **примеры случайных величин, вероятностные свойства которых определяются законом Гаусса:** 1) ошибки измерений; 2) координаты точек попадания при обстреле цели в одинаковых условиях из одного и того же орудия, если прицел постоянен; 3) проекции на оси координат скорости, с которой движется молекула свободного газа; 4) сумма достаточно большого числа независимых слагаемых случайных величин, подчинённых каким угодно законам распределения (при соблюдении некоторых весьма нежёстких ограничений); 5) наиболее существенные количественные характеристики однотипных изделий при их массовом производстве. 6) ошибки стрельбы по мишени.

Равномерный закон распределения

Случайная величина ξ называется **равномерной**, а соответствующее распределение - равномерным на конечном промежутке $(a,b]$, если ее плотность имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b]; \\ 0, & x \notin (a,b]. \end{cases}$$

Параметрами равномерного распределения являются a,b.

График плотности распределения $f_\xi(x)$ равномерной случайной величины ξ представлен на рис. 6.2.

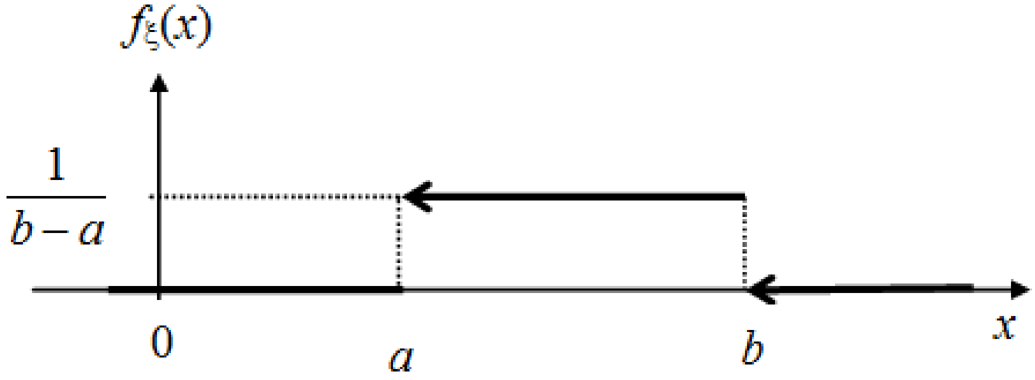


Рис. 6.2

Приведем **основные числовые характеристики для равномерного распределения**: математическое ожидание $\mathrm{M}(\xi)=\dfrac{b+a}{2}$, дисперсия $\mathrm{D}(\xi)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Для **вероятности попадания** равномерной случайной величины ξ **в интервал**, имеет место следующее соотношение:

$$\mathrm{P}(a_1<\xi<b_1)=\frac{b_1-a_1}{b-a},\ \text{где}\ (a_1,b_1)\subset(a,b].$$

Данная вероятность не зависит от расположения интервала (a_1,b_1) внутри промежутка $(a,b]$, а зависит только от длины этого интервала. Поэтому такая случайная величина ξ и называется равномерной.

Интегральная функция равномерной случайной величины имеет следующий вид:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Приведём **примеры равномерно распределённых случайных величин**: 1) ошибка, вызванная разными способами округления показаний измерительного прибора до целых делений шкалы; 2) расстояние между электростанцией и местом обрыва кабеля, по которому передается электрическая энергия потребителю; 3) время ожидания пассажиром прибытия автобуса при регулярном расписании на маршруте и случайном прибытии пассажира на остановку; 4) ошибка при компьютерных расчётах, когда вычисления проводятся с точностью, например, до второго знака после запятой.

Показательный или экспоненциальный закон распределения

Случайная величина ξ имеет показательное или экспоненциальное распределение, если ее плотность удовлетворяет соотношению:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0;\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

здесь $\lambda>0$ - параметр экспоненциального распределения.

График плотности распределения $f_\xi(x)$ показательной случайной величины ξ представлен на рис. 6.3.

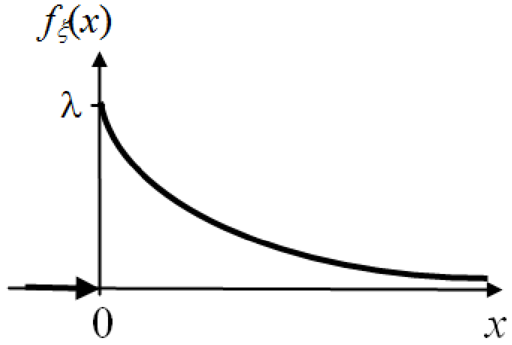


Рис. 6.3

Основные числовые характеристики для показательного распределения: математическое ожидание $\mathrm{M}(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}$, дисперсия $\mathrm{D}(\xi)=\dfrac{1}{\lambda^2}$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Для **вероятности попадания** случайной величины ξ, распределенной по показательному закону с параметром λ, **в интервал**, имеет место следующее соотношение:

$$\mathrm{P}(a<\xi<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}, \text{ где } 0<a<b.$$

Интегральная функция распределения для показательной с. в. ξ имеет вид:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$$

Приведём **примеры экспериментов, в которых встречается экспоненциальная случайная величина:** 1) время между соседними отказами в процессе эксплуатации системы, которая состоит из большого числа элементов; 2) промежуток времени между последовательными поступлениями вызовов на телефонную станцию; 3) продолжительность безотказной работы радиоэлементов; 4) промежуток времени между последовательными распадами атомов радиоактивного вещества; 5) время между последовательными прибытиями автомобилей к стоп-линии изолированного перекрёстка; 6) время между последовательными падениями метеоритов на территории Нижегородской области; 7) промежуток времени между последовательными поступлениями вызовов больных на пункт скорой помощи; 8) величина времени свободного пробега молекул газа.

6.2 Примеры решения задач

Пример 6.2.1. Рассматривается ошибка измерения диаметра некоторой детали. Известно, что систематическая ошибка измерения равна

1,2 и стандарт ошибки равен 0,8. Найти вероятность того, что ошибка измерения будет находиться в промежутке [–1,6, 1,6). Для простоты предполагаем, что измерения проводятся в неких условных единицах.

Решение: Известно, что ошибки измерений являются случайными величинами, вероятностные свойства которых определяются законом Гаусса. Таким образом, рассматриваемая в задачи ошибка измерения является нормальной случайной величиной ξ. Из условий задачи также получаем, что $\mathrm{M}(\xi)=1{,}2$ и $\sigma(\xi)=0{,}8$. То есть получаем, что с. в. ξ имеет $N(1{,}2;\ 0{,}8)$ распределение.

Используя последовательно формулу для распределения Гаусса, свойства функции Лапласа и таблицы функции Лапласа, например в [1] и [2], получаем:

$$\mathrm{P}(-1{,}6\le\xi<1{,}6)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{1{,}6-1{,}2}{0{,}8}\right)-\Phi\left(\frac{-1{,}6-1{,}2}{0{,}8}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\Phi(0{,}5)-\Phi(-3{,}5)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Phi(0{,}5)+\Phi(3{,}5)\right]=\frac{1}{2}\left[0{,}3829+0{,}9995\right]\approx 0{,}69.$$

Ответ: Вероятность того, что ошибка измерения будет лежать в промежутке [–1,6, 1,6) равна 0,69.

Пример 6.2.2. Определить серединную ошибку прибора, если систематических ошибок он не имеет, а случайные распределены по нормальному закону и с вероятностью 0,8 не выходят за пределы ± 20 условных единиц.

Решение: Пусть ξ - суммарная ошибка прибора. Систематическая составляющая отсутствует, значит $\mathrm{M}\xi=0$. Так как случайные ошибки подчиняются нормальному закону распределения, то имеет место соотношение для плотности с. в. ξ:

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\},\ 0<\sigma<+\infty.$$

Из условий задачи также следует, что $\mathrm{P}(|\xi|\le 20)=0{,}8$.

Далее используем формулу для нормального распределения:

$$\mathrm{P}(|\xi|\le 20)=\mathrm{P}(-20\le\xi\le 20)=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{-20}{\sigma}\right)\right]=\Phi\left(\frac{20}{\sigma}\right)=0{,}8.$$

Используя таблицы функции Лапласа, например в [1] и [2] решаем уравнение относительно среднего квадратического отклонения σ:

$$\frac{20}{\sigma} \approx 1{,}3 \Rightarrow \sigma \approx 15{,}3846$$.

Откуда, используя связь среднего квадратического σ и серединного отклонения $C(\xi)$ получаем:

$$C(\xi) \approx 0{,}6745\sigma = 0{,}6745 \cdot 15{,}3846 \approx 10{,}3769 .$$

Ответ: Серединная ошибка прибора $C(\xi) \approx 10{,}3769$ условных единиц.

Пример 6.2.3. Время ξ безотказной работы электронной лампы имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}5$. Определить, с какой вероятностью в результате эксперимента время безотказной работы лампы отклонится по абсолютной величине от своего среднего значения $\mathrm{M}(\xi)$ не меньше, чем на $3\sigma(\xi)$.

Решение: Интегральная функция распределения для случайной величины ξ имеет вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - e^{-0{,}5x}, & x > 0. \end{cases}$$

Кроме того, для показательного распределения известны значения основных числовых характеристик: Из свойств показательного распределения имеем равенство: $\mathrm{M}(\xi) = \sigma(\xi) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}5} = 2$.

Отсюда легко получаем, что вероятность

$$\mathrm{P}(|\xi - \mathrm{M}(\xi)| \ge 3\sigma(\xi)) = \mathrm{P}(|\xi - 2| \ge 6) = \mathrm{P}(\{\xi - 2 \le -6\} \cup \{\xi - 2 \ge 6\}) =$$
$$= \mathrm{P}(\{\xi \le -4\} \cup \{\xi \ge 8\}) = \mathrm{P}(\xi \le -4) + \mathrm{P}(\xi \ge 8) =$$
$$= 0 + 1 - F_\xi(8) + 0 = 1 - 1 + e^{-4} = e^{-4} \approx 0{,}0183 .$$

Ответ: $\mathrm{P}(|\xi - \mathrm{M}(\xi)| \ge 3\sigma(\xi)) \approx 0{,}0183$.

Пример 6.2.4. Трамваи идут строго по расписанию с интервалом движения в 10 минут. Пассажир приходит к платформе в случайный момент времени. Найти: а) среднее время ожиданиям посадки; б) вероятность того, что пассажир будет ожидать посадки не менее двух и не более пяти минут.

Решение: Пусть случайная величина ξ соответствует случайному времени ожидания посадки. Из условий задачи понятно, что с. в. ξ имеет равномерное распределение на промежутке $(0{,}10]$. То есть ее плотность распределения имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10}, & x \in (0,10]; \\ 0, & x \notin (0,10]. \end{cases}$$

а) Используя известное соотношение для математического ожидания равномерной случайной величины, находим, что среднее время ожидания, соответствующее математическому ожиданию случайной величины ξ, равно $\mathrm{M}(\xi) = \dfrac{10+0}{2} = 5$ мин.

б) Используя известное соотношение для попадания равномерной случайной величины в интервал, находим:

$$\mathrm{P}(2 \le \xi \le 5) = \mathrm{P}(2 < \xi < 5) = \frac{5-2}{10-0} = 0{,}3.$$

Ответ: а) среднее время ожиданиям посадки равно 5 мин; б) вероятность того, что пассажир будет ожидать посадки не менее двух и не более пяти минут равна 0,3.

6.3 Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.3.1. Проводятся измерения диаметра сечения трубы, рассматривается ошибка измерений. Известно, что систематическая ошибка измерения равна 0,5 и стандарт ошибки равен 1,2. Найти вероятность того, что ошибка измерения будет находиться в промежутке [-0,7, 1,7). Для простоты предполагаем, что измерения проводятся в неких условных единицах.

Задача 6.3.2. Срединная ошибка измерения дальности радиолокатором равна 25 м, а систематическая ошибка отсутствует. Определить: а) дисперсию ошибок измерения дальности; б) вероятность получения ошибки измерения дальности, не превосходящей по абсолютной величине 20 м.

Задача 6.3.3. Время ожидания ξ у бензоколонки автозаправочной станции имеет показательное распределение с параметром λ. Вычислить следующие вероятности: $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2\lambda} \le \xi \le \dfrac{1}{3\lambda}\right)$ и $\mathrm{P}\left(\xi > \dfrac{2}{\lambda}\right)$.

Задача 6.3.4. Поезда метро идут строго по расписанию с интервалом движения в 5 минут. Найти вероятность того, что пассажир, пришедший к платформе в случайный момент времени будет ожидать посадки не более двух минут.

Задача 6.3.5. Шкала секундомера имеет цену деления 0,2 сек. Какова вероятность сделать по этому секундомеру отсчет времени с ошибкой более 0,05 сек., если отсчет ведется с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону.

Задача 6.3.6. Маршрутные такси прибывают на остановку с интервалом 7 минут. Некто приходит на остановку в случайный момент времени. Найти среднее квадратическое отклонение времени ожидания пассажиром такси. Вычислить вероятность того, что пассажир будет ожидать такси не менее трех минут.

Задача 6.3.7. Фиксируется время ξ безотказной работы ЭВМ. Известно, что случайная величина ξ имеет показательное распределение, причем среднее время безотказной работы равно 2 условным единицам. Найти вероятность того что ЭВМ проработает не менее 4 условных единиц.

Задача 6.3.8. Случайная величина ξ распределена нормально, причем известно, что $\mathrm{M}(\xi) = -1$ и $\mathrm{D}\xi = 4$. Вычислить приближенно вероятность $\mathrm{P}(-2 < \xi < 1)$ и значение интегральной функции распределения с. в. ξ в точке $x_0 = 1{,}4$.

Задача 6.3.9. Случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $(0, \pi)$. Найти плотность распределения с. в. $\eta = \cos\xi$.

Задача 6.3.10. Случайная величина ξ распределена равномерно в промежутке $[1, 5]$. Найти вероятность $\mathrm{P}(2 < \xi \le 4)$, математическое ожидание $\mathrm{M}(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ с. в. ξ.

Литература

1. Федоткин М. А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики. Учебник. – М.: Высшая школа, 2006

2. Федоткин М.А. Модели в теории вероятностей. Учебник. – М.: Наука – ФИЗМАТЛИТ, 2012.

3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 2005.

4. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 1999.

5. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. - М.:Наука, 1982.

6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1, 2. – М.: Мир, 1984.

7. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для ВУЗов. – М.:Высшая школа, 1994.

8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студентов втузов - М.: Издательский центр «Академия», 2003.

Екатерина Вадимовна **Пройдакова**

Михаил Андреевич **Федоткин**

Владимир Александрович **Зорин**

ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть 1

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.